

Technische Universität Berlin



**THEORIE QUANTISIERTER ANREGUNGEN IN
GEKOPPELTEN NANOSTRUKTUREN**

Diplomarbeit

Alexander Carmele

27. Juni 2008

Die selbständige und eigenhändige Anfertigung versichere ich an Eides Statt.

Berlin, 27. Juni 2008

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	III
1 Einleitung	1
1.1 Motivation der Arbeit	1
1.2 Aufbau der Arbeit	2
2 Grundlegendes	3
2.1 Halbleiter-Nanostrukturen: Der Quantenpunkt	3
2.2 Transformation der Lagrangefunktion des Festkörpers	4
2.3 Der Hamiltonoperator des Festkörpers	4
2.3.1 Quantisierung von H_e	6
2.3.2 Quantisierung von H_{e-e}	8
2.3.3 Quantisierung von H_p	9
2.3.4 Quantisierung von H_{e-p}	11
2.4 Formalismus	12
2.4.1 Die Dichtematrix	12
2.4.2 Heisenberg-Bewegungsgleichung	12
2.5 Approximationsverfahren	13
2.5.1 Rotating-Wave-Approximation	13
2.5.2 Korrelationsentwicklung	13
2.5.3 Born-Approximation	13
2.5.4 Markov-Näherung	14
2.6 Dämpfung des elektronischen Systems	14
3 Das Photonenfeld	17
3.1 Charakterisierung des Photonenfeldes - $g^{(2)}$	17
3.1.1 Lichtfeld im Fockzustand	18
3.1.2 Kohärentes Licht	19
3.1.3 Gequetschtes Licht	20
3.1.4 Thermisches Licht	21
3.1.5 Übersichtstabelle mit den verschiedenen Photonstatistiken	22
3.2 Lichtpulse	23
3.2.1 Kohärenter Lichtpuls	23
3.2.2 Thermischer Lichtpuls	25
4 Das Jaynes-Cummings-Modell (JCM)	27
4.1 Hamilton-Operator des JCM	27
4.2 Analytische Lösung des JCM	28
4.3 Überlagerung von Besetzungszuständen im JCM	30
5 Isolierter Quantenpunkt	33
5.1 Stationäre Anregung	33
5.1.1 Bewegungsgleichungen	34
5.1.2 Analytische Lösung	35
5.1.3 Numerische Lösung für verschiedene $g^{(2)}$	36
5.1.4 Vergleich des numerischen mit dem analytischen Ergebnis	37

5.1.5	Vergleich der Leitungsbanddichte für verschiedene $g^{(2)}$	38
5.2	Nicht-stationäre Anregung	38
5.2.1	Korrelierte Bewegungsgleichungen	39
5.2.1.1	Kohärente Anregung	40
5.2.1.2	Thermische Anregung	41
5.2.2	Gültigkeitsgrenzen der Korrelationsentwicklung	41
5.2.3	Puls-Anregung - analytisches Ergebnis	43
5.2.4	Puls-Anregung - numerisches Ergebnis	44
5.3	Quantenpunkt als nicht-klassische Lichtquelle	46
5.3.1	Korrelierte Bewegungsgleichungen	46
5.3.2	Stationäre Lösung für $\langle c^\dagger c^\dagger cc \rangle^e$	47
5.3.2.1	Induzierte Emission	47
5.3.2.2	Spontane Emission	48
6	Zwei gekoppelte Quantenpunkte	50
6.1	Der Hamilton-Operator gekoppelter Quantenpunkte	50
6.2	Exziton-Basis	52
6.3	Stationäre Anregung	54
6.3.1	Bewegungsgleichungen in RWA	54
6.3.2	Exzitondichten: Numerische Ergebnisse	56
6.3.3	Exzitondichten für verschiedene Anregungsstärken	58
6.3.4	Biexzitondichte: Numerische Ergebnisse	60
6.3.5	Biexzitondichten für verschiedene Anregungsstärken	60
6.3.6	Differential-Transmission-Signal: Biexziton-Exziton	62
7	Zusammenfassung	65
8	Danksagung	66
A	Appendix	i
A.1	Transformation der Lagrangefunktion	i
A.2	Quantisierung von H_e : Effektive Masse	ii
A.3	Quantisierung von H_{e-e} : Taylor-Entwicklung	iii
A.4	Quantisierung von H_p	v
A.5	Quantisierung von H_p : Nebenrechnung	v
A.6	Quantisierung von H_{e-p} : Auswertung des Integrals	vi
A.7	Zeitentwicklung des Bad-Operators: Berechnung der Kommutatoren	vii
A.8	Dichteoperator des Bads ρ_R : Dissipative Moden	viii
A.9	Licht-Kopplungs-Element: Einsteinkoeffizient	viii
A.10	Radiative Dämpfung zweier gekoppelter Quantenpunkte	ix
A.11	Thermischer Lichtpuls: Rechnung	x
A.12	Korrelierte Bewegungsgleichungen: 1 Quantenpunkt	xii
A.13	Blochgleichungen: Analytische Lösung	xii
A.14	Thermischer Lichtpuls: k-Summen-Auswertung	xiii
A.15	Licht-Materie-Wechselwirkung: Lokale Basis	xiv
A.16	Diagonalisierung der 2x2-Matrix	xiv
A.17	Bewegungsgleichungen für zwei gekoppelte Quantenpunkte	xv
A.18	Materialparameter	xvi
	Literaturverzeichnis	xviii

Abbildungsverzeichnis

1.1	LHC-II (T.Renger)	1
2.1	Zustandsdichten verschiedener Einschlußpotentiale in Halbleiterstrukturen [BGL99].	3
2.2	Ein pyramidenförmiger InAs-Quantenpunkt [MGJ01].	3
2.3	Energie-Renormalisierungen	9
2.4	Förster-Wechselwirkung	9
2.5	Radiativer Zerfall in einem Zwei-Niveau-System für verschiedene Photonzahlen . .	16
3.1	Das Hanbury Brown-Twiss-Experiment	17
3.2	Visualisierte Photonstatistik	23
4.1	Das Jaynes-Cummings-Modell	27
4.2	JCM: Vakuum-Rabi-Oszillation der Elektronendichten des Leitungsbandes (rot) und Valenzbandes (schwarz), Photonenzahl am Anfang: $n=0$	30
4.3	JCM: Leitungsbanddynamik eines Zwei-Niveau-Systems in einem kohärenten Lichtfeld	31
4.4	JCM: Leitungsbanddynamik eines Zwei-Niveau-Systems in einem thermischen Lichtfeld	32
5.1	Leitungsbanddynamik eines isolierten Quantenpunktes: Stationär angeregt mit einem kohärenten (rot) und thermischen Lichtfeld (rot) - numerische Ergebnisse . .	37
5.2	Leitungsbanddynamik eines isolierten Quantenpunktes: Vergleich des analytischen (grün, blau) mit dem numerischen Ergebnis (schwarz, rot).	38
5.3	Leitungsbanddynamik eines isolierten Quantenpunktes: Unterschied zwischen kohärenter (schwarz) und thermisch (rot) erzeugter Anregung	39
5.4	Leitungsbanddichte eines isolierten Quantenpunktes: Lösung der Korrelationsentwicklung (schwarz) mit dem analytischen Ergebnis des Jaynes-Cummings-Modell (rot) verglichen - nicht angeregt.	42
5.5	Leitungsbanddichte eines isolierten Quantenpunktes: Lösung der Korrelationsentwicklung für kohärentes (schwarz) und thermisches Lichtfeld (rot) mit dem analytischen Ergebnis des Jaynes-Cummings-Modell (grün) verglichen - stationär angeregt.	42
5.6	Leitungsbanddichte eines isolierten Quantenpunktes: Nicht-Stationär angeregt mit einem kohärenten (rot, nicht zu sehen) und thermischen Lichtfeld (blau) - numerisches Ergebnis	45
5.7	Leitungsbanddichte eines isolierten Quantenpunktes: Nicht-Stationär angeregt für verschiedene Dämpfungsstärken. $1\mu eV$ (rot), $0.75\mu eV$ (blau), $0.5\mu eV$ (grün), Gaußpuls (schwarz) - numerisches Ergebnis	45
6.1	Schematische Darstellung der Förster- und der radiativen Kopplung zweier Coulombgekoppelter Quantenpunkte (dargestellt in lokaler Basis)	50
6.2	Lokale Operatoren zweier Coulomb-gekoppelter Quantenpunkte	51
6.3	Nicht-lokale, exzitoniche Operatoren zweier Coulomb-gekoppelter Quantenpunkte	52
6.4	Pfade der nicht-lokalen Anregung zweier Coulomb-gekoppelter Quantenpunkte . .	55
6.5	Exzitondichte zweier gekoppelter Quantenpunkte: Stationär und resonant angeregt mit einem kohärenten (schwarz), thermischen Lichtfeld (rot) und gequetschten Lichtfeld (blau) - numerische Ergebnisse	57

6.6	Exzitondichte zweier gekoppelter Quantenpunkte: Stationär und nicht-resonant angeregt mit einem kohärenten (schwarz), thermischen Lichtfeld (rot) und gequetschten Lichtfeld (blau) - numerische Ergebnisse	58
6.7	Exzitondichte zweier gekoppelter Quantenpunkte in Abhängigkeit von der Anregungsstärke (Photonzahl des stationär eingestrahlten Lichtfeldes): Stationär und resonant angeregt mit einem kohärenten (schwarz), thermischen Lichtfeld (rot) und gequetschten Lichtfeld (blau) - numerische Ergebnisse	59
6.8	Exzitondichte zweier gekoppelter Quantenpunkte: $\Delta\langle B_m^{1\dagger} B_m^1 \rangle$ - normierte Differenz als Funktion der Anregungsstärke (Photonzahl des stationär eingestrahlten Lichtfeldes)	59
6.9	Biexzitondichte zweier gekoppelter Quantenpunkte: Stationär angeregt mit einem kohärenten (schwarz), thermischen Lichtfeld (rot) und gequetschten Lichtfeld (blau) - numerische Ergebnisse	60
6.10	Biexzitondichte zweier gekoppelter Quantenpunkte in Abhängigkeit von der Anregungsstärke (Photonzahl des stationär eingestrahlten Lichtfeldes): Stationär angeregt mit einem kohärenten (schwarz), thermischen Lichtfeld (rot) und gequetschten Lichtfeld (blau) - numerische Ergebnisse	61
6.11	Exzitondichte zweier gekoppelter Quantenpunkte: $\Delta_{therm}\langle P^{2\dagger} P^2 \rangle$ - normierte Differenz als Funktion der Anregungsstärke (Photonzahl des stationär eingestrahlten Lichtfeldes)	61
6.12	Exzitondichte zweier gekoppelter Quantenpunkte: $\Delta_{squeezed}\langle P^{2\dagger} P^2 \rangle$ - normierte Differenz als Funktion der Anregungsstärke (Photonzahl des stationär eingestrahlten Lichtfeldes)	62
6.13	DTS zweier gekoppelter Quantenpunkte: Stationär und resonant angeregt mit einem kohärenten (schwarz), thermischen Lichtfeld (rot) und gequetschten Lichtfeld (blau) - numerische Ergebnisse	63

1 Einleitung

Die Quantennatur des Lichtes ist mittlerweile akzeptiert. Hinreichend viele Experimente haben mittels Photonen-Zählung nicht-klassische Phänomene des Lichtfeldes wie das Anti-Bunching demonstriert [KDM77], die nicht mehr im klassischen oder semi-klassischen Bild des elektromagnetischen Feldes erklärt werden können. Das Jaynes-Cummings-Modell [JC63] dient als Grundlage für die theoretische Beschreibung und Begründung dieser quantenoptischen Effekte, berücksichtigt es doch beispielsweise Quantisierungseffekte in Resonatoren und sagte das Vakuum-Rabi-Flopping voraus, eine durch die spontane Emission erklärable Oszillation in Resonatoren unter Abwesenheit von Photonen. Der Vorteil des Jaynes-Cummings-Modell ist seine analytische Lösbarkeit und die darauf basierende Möglichkeit, mittels einer Superposition von Fockzuständen, von der Licht-Statistik abhängige Rabi-Oszillationen zu beschreiben, sogenannte Collapse- und Revival-Effekte [SK93]. Die Grenzen des Jaynes-Cummings-Modells liegen jedoch auf der Hand. Es vermag lediglich ein 1-modiges Lichtfeld in Wechselwirkung mit einem isolierten Zwei-Niveau-System unter Vernachlässigung dissipativer Effekte zu beschreiben.

Vom Jaynes-Cummings-Modell ausgehend sind realistischere Modelle vorgeschlagen worden, isolierte Zwei-Niveau-Systeme in Wechselwirkung mit einem quantisierten Lichtfeld theoretisch zu beschreiben [SMMH07]. Insbesondere wurde die Frage untersucht, inwiefern die Photonstatistik einen Einfluß auf Absorptionsprozesse besitzt, also die Quantennatur, die sich in einer charakteristischen statistischen Beschreibung niederschlägt und die Licht-Materie-Wechselwirkung beeinflusst ([GP94], [KC94], [Par96]). Die festgestellten Unterschiede in der Dynamik können beispielsweise zur Charakterisierung des Lichtfeldes dienen [AHZ97] oder als Grundlage zu Untersuchungen von Mehr-Niveau-Systemen [Orr02]. Über diese Aspekte hinaus wird vorgeschlagen, überhaupt spektroskopische Untersuchungen, beispielsweise in Halbleitern [KK06], unter quantenoptischen Aspekten durchzuführen, also mit der Lichtstatistik als weiterer Kontrollparameter, um Licht-Materie-Wechselwirkung in Nanostrukturen grundlegender zu verstehen [KKKG06].

1.1 Motivation der Arbeit

Die Fragestellung, inwieweit quantenoptische Prozesse grundlegend wichtig für das Verständnis der Licht-Materie-Wechselwirkung sind, ist insbesondere für die Photosyntheseforschung relevant. Lichtsammelkomplexe (LHC) können als Coulomb-gekoppelte Zwei-Niveau-Systeme beschrieben werden [RAK⁺06]. Berücksichtigt man desweiteren, daß das Licht der Sonne die Charakteristik eines schwarzen Strahlers hat, also das mit dem Lichtsammelkomplex wechselwirkende Licht thermisch und somit nur quantenoptisch über den statistischen Operator zu beschreiben ist, so kommt der Theorie quantisierter Anregungen in Nanostrukturen eine besondere Bedeutung zu. Mit ihrer Hilfe läßt sich untersuchen, inwieweit Lichtsammelkomplexe für eine Anregungsform optimiert sind. Es zeigt sich, daß in Coulomb-gekoppelten Systemen Biexzitationen, also eine Mehrfach-Anregung, effizienter durch thermisches Licht angeregt werden können. Diese Arbeit versteht sich vor diesem Hintergrund als ein erster Schritt, Lichtsammelprozesse im

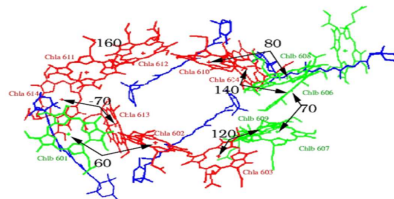


Abbildung 1.1: LHC-II (T.Renger)

LHC-II (eine Kette von 14 als Zwei-Niveau-System beschriebene Chlorophyll-Moleküle [RRRK07] in der Abbildung 1.1) gründlicher zu verstehen.

1.2 Aufbau der Arbeit

Aus der Zielsetzung, die Dynamik der Leitungsbanddichten in gekoppelten Nanostrukturen zu untersuchen, folgt eine vierteilige Struktur der Arbeit. Ausgehend von den Grundlagen, dem Hamilton-Operator des Festkörpers und den verwendeten Formalismen in Kapitel 2 und nach der Charakterisierung des Photonenfeldes in Kapitel 3 werden die theoretischen Werkzeuge einerseits auf einen isolierten Quantenpunkt als Beispiel für eine aktuell interessante Nanostruktur in Kapitel 5 und abschließend auf zwei gekoppelte Quantenpunkte in Kapitel 6 angewendet.

In Kapitel 2 wird der Quantisierung des Lichtfeldes besondere Aufmerksamkeit gewidmet sowie dem Jaynes-Cummings-Modell in Kapitel 4, das ausführlich behandelt und mit seinen Ergebnissen vorgestellt wird. Mit diesen Grundlagen ergeben sich die ersten Unterschiede in der Anregungsdynamik, induziert durch verschiedene Photonstatistiken, deren Begriff in Kapitel 3 dargelegt wird. Anhand der bekannten Standards werden die theoretischen Begrifflichkeiten zur Unterscheidung der Lichtfelder entwickelt sowie mittels der entsprechenden statistischen Operatoren für thermisches und gequetschtes Licht Erwartungswertberechnungen durchgeführt, die im weiteren Verlauf der Arbeit verwendet werden. Ergänzend werden auch nicht-stationäre Anregungsformen betrachtet, also quantisierte Pulse, die die ersten Schritte darlegen, beispielsweise einen thermischen Lichtpuls als propagierende Intensitätsverteilung quantenmechanisch zu verstehen und auf ein elektronisches System einwirken lassen zu können. Ein besonderes einfaches Beispiel für dieses steht in Kapitel 5 im Mittelpunkt: ein isolierter Quantenpunkt, der in der effektiven Massen-Näherung als Zwei-Niveau-System behandelt werden kann und exemplarisch mit den errechneten Zwei-Niveau-Dynamiken der Literatur verglichen werden kann [Par96]. Der isolierte Quantenpunkt wird sowohl stationär als auch nicht-stationär angeregt. Die Leitungsbanddichte wird für verschiedene Lichtfeld-Statistiken berechnet und graphisch sowie numerisch in ihrer Abhängigkeit von der Anregungsstärke verglichen. Zur Überprüfung ergänzen jeweils analytische Betrachtungen die vorgestellten numerischen Ergebnisse und erlauben weitergehende Interpretationen und Deutungen. Mit den Ergebnissen für ein isolierten Quantenpunkt werden die Berechnungen in Kapitel 6 für gekoppelte Nanostrukturen durchgeführt, hier bestehend aus zwei Förster-gekoppelten Quantenpunkten, ohne Tunneleffekte. Die Coulomb-Kopplung überführt die Zwei-Niveau-Systeme in ein Vier-Niveau-System mit einem Grundzustand, zwei Exziton- und einer Biexzitondichte, die gesondert berechnet und miteinander unter verschiedenen Anregungsformen verglichen werden. Besonderes Augenmerk wird auf die Biexzitondichte gelegt, die keine Vergleichsgröße in den sonst in der Literatur angestellten Berechnungen in einem ungekoppelten Zwei-Niveau-System besitzt.

Der Einfluß der Lichtstatistik zeigt erst bei nicht-linearer Anregung deutlich meßbare Unterschiede. In den Bewegungsgleichungen der 4. Ordnung im Lichtkopplungs-Element kommt die Korrelationsfunktion der Intensität zum Tragen und die Anregungsschema verhalten sich quantitativ stark verschieden. Für Exzitonen oder isolierte Zwei-Niveau-Systeme ohne Coulombkopplung beträgt die prozentuale Abweichung der jeweils erreichten Maxima der Leitungsbanddichte bis zu 4 %. Stark wird der Unterschied für die Biexzitondichte in einem gekoppelten System. Hier beträgt der Unterschied der jeweils erreichten Biexzitondichten bis zu 40 %, so daß der Schluß gezogen werden kann, daß quantenoptische Beiträge und Charakteristiken interessant für die Erforschung von gekoppelten Systemen sind.

2 Grundlegendes

2.1 Halbleiter-Nanostrukturen: Der Quantenpunkt

Fortschritte in der Beherrschung von Kristallwachstumsprozessen machen es möglich, Nanostrukturen zu designen. Mittels Wachstumsverfahren wie MOCVD (metal organic chemical vapour deposition) und MBE (molecular beam epitaxy) werden in ein Kristallgitter gezielt Fremdstoffe eingebaut, z.B. InAs in GaAs, um unter Ausnutzung von Quanteneffekte die Bewegungsfreiheit der Ladungsträger im Halbleiter einzuschränken [BGL99]. Abbildung 2.1 zeigt die verschiedenen Möglichkeiten die dreidimensionale Bewegung des Elektrons einzuschränken. Aufgetragen ist die Zustandsdichte

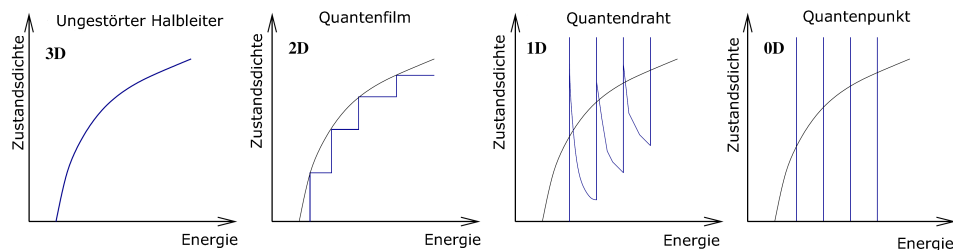


Abbildung 2.1: Zustandsdichten verschiedener Einschlußpotentiale in Halbleiterstrukturen [BGL99].

über der Energie. Ohne Einschränkungspotential können sich die Ladungsträger im Kristallgitter in alle Richtungen ausbreiten, d.h. für jeden Energiewert gibt es auch einen entsprechenden Zustand, in dem sich der Ladungsträger befinden kann. Mit einem Einschränkungspotential kann die Zustandsdichte angepaßt und in dem Extremfall eines Quantenpunktes von einer kontinuierlichen Funktion in eine Deltafunktion verwandelt werden.

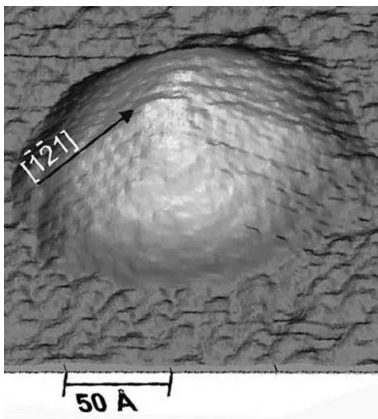


Abbildung 2.2: Ein pyramidenförmiger InAs-Quantenpunkt [MGJ01].

Die Bewegung der Ladungsträger ist in einem solchen Fall vollständig eingeschränkt. Die möglichen Energiewerte liegen diskret wie bei einem Atom, weshalb Quantenpunkte auch künstliche Atome genannt werden. Um die quantisierte Anregung in gekoppelten Nanostrukturen zu untersuchen, wird in dieser Arbeit der Quantenpunkt als prominentes Beispiel einer Nanostruktur gewählt.

Halbleiter-Quantenpunkte können verschiedene Formen und Größen haben. In Abbildung 2.2 ist ein pyramidenförmiger InAs-Quantenpunkt in einem GaAs-Halbleiter zu sehen, aufgenommen von einem Rastertunnelmikroskop. Die Ausdehnung des Quantenpunktes beträgt in diesem Fall ca. 10nm. Dies ist eine typische Größe für selbstorganisiert-gewachsene Quantenpunkte, die somit um eine Größenordnung kleiner als die Wellenlänge von optischen Licht sind (ca.500nm). Die Bandlückenenergie

hängt stark von den verwendeten Materialien ab. Für einen InAs-Quantenpunkt beträgt sie beispielsweise zwischen 1eV und 2eV [BGL99]. Für die resonante Anregung beträgt die Wellenlänge des Lichtes also 850nm. Die Dipolnäherung, bei der angenommen wird, daß die Wellenlänge des

Lichtes viel größer als die Ausdehnung des Objektes ist, ist somit gültig. In dieser Arbeit wird durchgängig angenommen, daß sich nur ein Elektron in einem Quantenpunkt befindet und dieses den Quantenpunkt nicht verlassen kann. Die Geometrien des Quantenpunktes gehen über die Eigenfunktionen in die Berechnung der Matrixelemente ein [WRRK07], die von dem Einschlußpotential abhängen. In den nächsten Abschnitten wird gezeigt, wie die Dynamik der Elektronen in den Quantenpunkten und die mit ihnen wechselwirkenden Photonen mittels des Hamiltonoperators theoretisch beschrieben werden.

2.2 Transformation der Lagrangefunktion des Festkörpers

Um die Wechselwirkung von Elektronen in gekoppelten Quantenpunkten mit einem quantisierten Lichtfeld zu beschreiben, muss der Hamilton-Operator des betreffenden Systems aufgestellt werden. Ausgegangen wird hierbei von der Lagrangefunktion [VWW01]:

$$L = \sum_n \left[\frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}_n^2 - q\phi(\mathbf{r}_n) + V_G(\mathbf{r}_n) + U_{D_n}(\mathbf{r}_n) \right] + \frac{1}{2} \int d^3r \left[\epsilon_0 \epsilon_m \underline{E}^2(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{\mu_0} \underline{B}^2(\mathbf{r}, t) \right] + \sum_n q \dot{\mathbf{r}}_n \cdot \underline{A}(\mathbf{r}_n). \quad (2.2.1)$$

für N Elektronen in N Quantenpunkten ($q = |e|$), die sich in einem periodischen Gitterpotential $V_G(r)$ und einem Einschlusspotential $U_{D_n}(r)$ des Quantenpunktes befinden sowie untereinander und mit dem elektrischen $\underline{E}(\mathbf{r}, t)$ wie magnetischen $\underline{B}(\mathbf{r}, t)$ über das Vektorpotential $\underline{A}(\mathbf{r}, t)$ wechselwirken. Das Ionenfeld, dessen Schwingungsmodi quantisiert die Elektron-Phonon-Wechselwirkung ergibt, geht hier nur über das Gitterpotential ein. Die Quantenpunkte sind eingebettet in einem Halbleiter, der durch eine frequenz- und ortsunabhängige Dispersionskonstante $\epsilon_m(r, \omega) = \epsilon_m$ berücksichtigt wird. Dies ist nur gültig, wenn Absorptions- und Dispersionsprozesse des Hintergrundmediums vernachlässigt werden können.

Die Elektron-Licht-Wechselwirkung kann auf unterschiedliche Arten im Hamilton-Operator berücksichtigt werden. In Gleichung 2.2.1 errechnet sich die Kopplung über das Vektorpotential $\underline{A}(\mathbf{r}, t)$. Nutzt man die Eichfreiheit der Lagrangefunktion:

$$L' = L - \frac{d}{dt} \mathcal{F}(\mathbf{r}, t) = L - q \frac{d}{dt} \underline{A}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{r},$$

führt die Dipol-Approximation $\underline{A}(\mathbf{r}, t) \rightarrow \underline{A}(\mathbf{r}_n, t)$ aus und wählt für das Vektorpotential die Coulomb-Eichung, erhält man eine Lagrangefunktion, in der die Elektron-Licht-Wechselwirkung über das transversale elektrische Feld $\underline{E}^\perp(\mathbf{r}_n, t)$ geht:

$$L' = \sum_n \left[\frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}_n^2 - \frac{1}{2} q\phi(\mathbf{r}_n) + V_G(\mathbf{r}_n) + U_{D_n}(\mathbf{r}_n) \right] + q \sum_n \mathbf{r}_n \cdot \underline{E}^\perp(\mathbf{r}_n, t) + \frac{1}{2} \int d^3r \left[\epsilon_0 \epsilon_m [\underline{E}^\perp(\mathbf{r}_n, t)]^2 - \frac{1}{\mu_0} [\underline{B}(\mathbf{r}_n, t)]^2 \right]. \quad (2.2.2)$$

In Appendix A.1 ist eine ausführliche Rechnung dieser Transformation zu finden.

2.3 Der Hamiltonoperator des Festkörpers

Über eine Legendre-Transformation kann nun die Hamiltonfunktion des Festkörpers aufgestellt werden. Das elektrische Potential wird durch die übliche Lösung [Jac01]:

$$\phi(\mathbf{r}_n) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_m} \sum_m \frac{q}{|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m|} \quad (2.3.3)$$

ersetzt. Das elektrische Feld ist im Material über die elektrische Flußdichte mit der Polarisation verknüpft:

$$\underline{D}^\perp(\underline{r}_n, t) = \epsilon_0 \epsilon_m \underline{E}^\perp(\underline{r}_n, t) + \underline{P}^\perp(\underline{r}_n, t), \quad (2.3.4)$$

wobei $P^\perp(\underline{r}) = \sum_n q \underline{r}_n \delta(\underline{r} - \underline{r}_n)$ die Polarisation berücksichtigt, die von den im System vorhandenen Ladungen, den Elektronen in den Quantenpunkten an den Orten \underline{r}_n , in \underline{r} induziert wird. Es ergibt sich eine Hamiltonfunktion, die aus vier Anteilen besteht:

$$H = H_e + H_{e-e} + H_p + H_{e-p}. \quad (2.3.5)$$

Die einzelnen Anteile erhalten folgende Gestalt:

1. Die Energie der quasi-freien Bewegung der Elektronen in dem Gitter- und Einschlußpotential:

$$\begin{aligned} H_e &= \sum_n \left[\frac{p_n^2}{2m} + V_G(\underline{r}_n) + U_{D_n}(\underline{r}_n) \right] \\ &= \sum_n \int d^3r \psi_n^*(\underline{r}, t) \left[\frac{p_n^2}{2m} + V_G(\underline{r}_n) + U_{D_n}(\underline{r}_n) \right] \psi(\underline{r}, t), \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

in die sowohl die Materialeigenschaften des Festkörpers wie die geometrischen Eigenschaften des Quantenpunktes eingehen [HK04]. Über die Effektive-Massen- und Einhüllenden-Näherung wird in Abschnitt 2.3.1 gezeigt, daß ein isolierter Quantenpunkt als Zwei-Niveau-System beschrieben werden kann.

2. Die Coulombwechselwirkung zwischen den Elektronen:

$$\begin{aligned} H_{e-e} &= \frac{1}{8\pi\epsilon_0\epsilon_m} \sum_{nm} \frac{q^2}{|\underline{r}_n - \underline{r}_m|} \\ &= \frac{1}{8\pi\epsilon_0\epsilon_m} \sum_{nm} \int d^3r_1 \int d^3r_2 \left\{ \frac{\psi_n^*(\underline{r}_1, t) \psi_m^*(\underline{r}_2, t) \psi_m(\underline{r}_2, t) \psi_n(\underline{r}_1, t)}{|\underline{r}_n - \underline{r}_m|} \right\}, \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

hängt nur von dem Abstand ab, den die Elektronen voneinander einnehmen. Diese Zwei-Teilchen-Wechselwirkung überführt die Zwei-Niveau-Systeme in ein Mehr-Niveau-System über die Förster-Wechselwirkung. Herleitung und schematische Darstellungen der Coulombwechselwirkung sind im Abschnitt 2.3.2 zu finden.

3. Die freie Energie der Photonen im Festkörper:

$$H_p = \frac{1}{2} \int d^3r \left[\frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_m} [D^\perp(\underline{r}, t)]^2 + \frac{1}{\mu_0} [\underline{B}(\underline{r}, t)]^2 \right] \quad (2.3.8)$$

ist aus dem Poyntingschen Theorem der klassischen Elektrodynamik bekannt [Jac01]. In Abschnitt 2.3.3 wird diese mit Hilfe von ungekoppelten harmonischen Oszillatoren beschrieben, die den bosonischen Vertauschungsregeln genügen.

4. Zuletzt die Elektron-Licht-Wechselwirkung:

$$\begin{aligned} H_{e-p} &= -\frac{q}{\epsilon_0 \epsilon_m} \sum_n D^\perp(\underline{r}_n, t) \cdot \underline{r}_n \\ &= -\frac{q}{\epsilon_0 \epsilon_m} \sum_n \int d^3r \psi_n^*(\underline{r}, t) [D^\perp(\underline{r}, t) \cdot \underline{r}_n] \psi_n(\underline{r}, t), \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

die hier in Dipol-Kopplung formuliert ist. Sowohl Anregung wie Emission können mit ihr beschrieben werden. In dieser Arbeit wird quantisiert angeregt und die Elektron-Licht-Wechselwirkung daher in Abschnitt 2.3.4 in den Formalismus der zweiten Quantisierung überführt, statt wie gewöhnlich für das Pumpfeld eine semiklassische Näherung durchzuführen [Muk95].

Zur Vorbereitung auf die Zweite Quantisierung wurde in den Gleichungen 2.3.6 bis 2.3.9 die Ladungsdichte über die Aufenthaltswahrscheinlichkeit der Elektronen ausgedrückt. Der Term, in welchem die Polarisation zum Quadrat eingeht, wird in dieser Arbeit vernachlässigt. In den nächsten Abschnitten gilt es nun, die Hamiltonfunktion als Operator in den Formalismus der Zweiten Quantisierung zu überführen.

2.3.1 Quantisierung von H_e

Zur zweiten Quantisierung wird das elektronische System in 2.3.6 durch fermionische Erzeuger- und Vernichtoperatoren dargestellt:

$$\psi_n \rightarrow \Psi_n \quad (2.3.10)$$

$$\psi_m^* \rightarrow \Psi_m^\dagger, \quad (2.3.11)$$

die den vom Pauli-Prinzip geforderten fermionischen Vertauschungsregeln

$$\left[\Psi_n^{(\dagger)}(r, t), \Psi_m^{(\dagger)}(r', t) \right]_+ = 0, \quad (2.3.12)$$

$$\left[\Psi_n(r, t), \Psi_m^{(\dagger)}(r', t) \right]_+ = \delta_{nm} \delta(r - r'), \quad (2.3.13)$$

mit dem Antikommutator $[A, B]_+ = AB + BA$ gehorchen [Hak73]. Dieser trägt der Tatsache Rechnung, daß sich zwei Elektronen nicht am selben Ort in ein und demselben Zustand befinden können. Sie müssen sich mindestens im Spin unterscheiden.

Blochansatz und Einhüllenden-Näherung

Die Feldoperatoren werden nun im Separationsansatz nach Moden entwickelt, die im Ortsraum ein Orthogonalsystem darstellen [Sch99]:

$$\Psi_m(r, t) = \sum_{ik} a_{im}(t) \phi_{im,k}(\underline{r}), \quad (2.3.14)$$

$$\Psi_m^\dagger(r, t) = \sum_{ik} a_{im}^\dagger(t) \phi_{im,k}^*(\underline{r}) \quad (2.3.15)$$

$$\int d^3r [\phi_{in,k}^*(r) \phi_{im,k'}(r)] = \delta_{mn} \delta_{kk'}, \quad (2.3.16)$$

wobei der Spin implizit im Summationsindex mitgezählt wird und im folgenden unberücksichtigt bleibt. Der Ortsanteil $\phi_{im,k}(\underline{r})$ (i=Quantenpunkt, m=Bandindex, k=Impuls) muß aus dem ungestörten Hamilton-Operator des Festkörpers H_B ermittelt werden:

$$H_B = \frac{p^2}{2m} + V_G(\underline{r}). \quad (2.3.17)$$

Da es sich um gitterperiodisches Potential $V_G(\underline{r}) = V_G(\underline{r} + \underline{R})$ handelt (\underline{R} ist ein Gittervektor), wird der Blochansatz gewählt und der Ortsanteil bekommt folgende Gestalt [Czy04]:

$$\phi_{im,k}(\underline{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{ik \cdot \underline{r}} u_{k,im}(\underline{r}).$$

Das Eigenwertproblem

$$H_B \phi_{im,k}(\mathbf{r}) = \tilde{E}_{im,k} \phi_{im,k}(\mathbf{r}) \quad (2.3.18)$$

wird als bekannt vorausgesetzt. Der m-te Quantenpunkt wird durch ein Einschlußpotential $U_{D_m}(\mathbf{r})$ beschrieben, das sich nur wenig über die Elementarzellen ändert. Die Eigenwertgleichung lautet:

$$\left\{ \frac{p^2}{2m} + V_G(\mathbf{r}) + U_{D_m}(\mathbf{r}) \right\} \phi_{im}(\mathbf{r}) = E_{im} \phi_{im}(\mathbf{r}). \quad (2.3.19)$$

Der Ortsanteil wird nun über Blochwellen mit Entwicklungskoeffizienten b_k entwickelt:

$$\phi_{im}(\mathbf{r}) = \sum_k b_k \phi_{im,k}(\mathbf{r}) = \sum_k b_k \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} u_{im,k}(\mathbf{r}). \quad (2.3.20)$$

Mit diesem Ansatz wird nun das Eigenwertproblem gelöst. Der Ansatz wird eingesetzt und mit $\phi_{im,k'}^*(\mathbf{r})$ multipliziert, sowie über das Festkörper-Volumen integriert:

$$\begin{aligned} \sum_k b_k \int_V d^3r \phi_{im,k'}^*(\mathbf{r}) \left\{ \frac{p^2}{2m} + V_G(\mathbf{r}) + U_{D_m}(\mathbf{r}) \right\} \phi_{im,k}(\mathbf{r}) \\ = \sum_k b_k E_{im} \int_V d^3r \phi_{im,k'}^*(\mathbf{r}) \phi_{im,k}(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (2.3.21)$$

Nutzt man nun die Eigenschaften der Potentiale aus und berücksichtigt nur Impulse $k \approx 0$, ergibt sich nach einer Rechnung, die im Appendix A.2 nachvollzogen werden kann, aus Gleichung 2.3.21:

$$b_{k'} \tilde{E}_{im,k'} + b_{k'} U_{D_m}(\mathbf{r}) = b_{k'} E_{im}. \quad (2.3.22)$$

Effektive-Massen-Näherung

Der letzte Schritt besteht nun darin anzunehmen, daß durch das Gitterpotential eine quasi-freie Bewegung in einem parabolischen Potential simuliert wird, das Elektron wird zu einem Quasiteilchen mit einer effektiven Masse m^* [Sch99]. Man setzt:

$$\tilde{E}_{im,k'} = \tilde{E}_{im,0} + \frac{\hbar^2 k'^2}{2m^*}. \quad (2.3.23)$$

Einsetzen von 2.3.23 in 2.3.22, Multiplikation mit $\frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}}$ und Summation über k' führt zu:

$$\left(\frac{\hbar^2 k'^2}{2m^*} + U_{D_m}(\mathbf{r}) \right) \sum_{k'} \frac{b_{k'}}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}} = \sum_{k'} \left(E_{im} - \tilde{E}_{im,0} \right) \frac{b_{k'}}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}}.$$

Schließlich mit $p^2 = \hbar^2 k^2$ und der Definition der Einhüllenden-Funktion

$$\xi(\mathbf{r}) = \sum_{k'} \frac{b_{k'}}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}} \quad (2.3.24)$$

angepaßt, je nach Energie-Eigenwert auf das jeweilige Band i und den Quantenpunkt m , folgt als Lösung für die Einhüllenden-Näherung die Eigenwertgleichung:

$$\left(\frac{p^2}{2m^*} + U_{D_m}(\mathbf{r}) \right) \xi_{im}(\mathbf{r}) = \left(E_{im} - \tilde{E}_{im,0} \right) \xi_{im}(\mathbf{r}). \quad (2.3.25)$$

Der Ortsanteil aus 2.3.20 kann also als Produkt der Blochfunktion mit der schwach über die Elementarzellen variierenden Einhüllenden geschrieben werden:

$$\phi_{im}(\mathbf{r}) = u_{im}(\mathbf{r})\xi_{im}(\mathbf{r}). \quad (2.3.26)$$

Die k-Abhängigkeit ist nun in der effektiven Masse und der Quantenpunkt kann als Zwei-Niveau-System behandelt werden [HK04].

Mit den Feldoperatoren und den geforderten Vertauschungsregeln läßt sich nun die Hamiltonfunktion in einen Hamiltonoperator überführen, indem die gefundenen Ausdrücke eingesetzt, die Eigenwertgleichung ausgeführt und die Vertauschungsregeln angewendet werden:

$$H_e = \sum_{in} \epsilon_{in} a_{in}^\dagger a_{in} = \sum_n [\hbar\omega_{vn} a_{vn}^\dagger a_{vn} + \hbar\omega_{cn} a_{cn}^\dagger a_{cn}]. \quad (2.3.27)$$

2.3.2 Quantisierung von H_{e-e}

Die Coulombwechselwirkung ist eine Zwei-Teilchen-Wechselwirkung. Ganz allgemein läßt sich 2.3.7 mit Hilfe der Ergebnisse aus Abschnitt 2.3.1, insbesondere durch die Definition in Gleichung 2.3.11 wie folgt ausdrücken [Ahn06]:

$$H_{e-e} = \sum_{\substack{mnop \\ ijkl}} V_{mnop}^{ijkl} a_{im}^\dagger a_{jn}^\dagger a_{ko} a_{lp}. \quad (2.3.28)$$

Das Matrixelement der Coulombwechselwirkung

$$V_{mnop}^{ijkl} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \sum_{nm} \int d^3r_1 \int d^3r_2 \left[\frac{\phi_n^*(\mathbf{r}_1, t) \phi_m^*(\mathbf{r}_2, t) \phi_m(\mathbf{r}_2, t) \phi_n(\mathbf{r}_1, t)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \right]. \quad (2.3.29)$$

muß nun entsprechend den vorliegenden Parametern an die physikalische Situation angepaßt werden. Hierfür wird der Nenner, in welchen der Abstand zwischen den wechselwirkenden Elektronen eingeht, zweimal mittels einer Taylor-Reihe entwickelt [DAFK06]. In Appendix A.3 ist eine detaillierte Herleitung der Wechselwirkungsterme beschrieben. Das Ergebnis für zwei Elektronen in zwei räumlich getrennten Quantenpunkten, die nicht tunneln können, läßt sich kompakt zusammenfassen:

$$\begin{aligned} H_{e-e} = & V_F^{12} a_{c1}^\dagger a_{v2}^\dagger a_{c2} a_{v1} + V_F^{21} a_{v1}^\dagger a_{c2}^\dagger a_{v2} a_{c1} \\ & + V_{vc}^{12} a_{c1}^\dagger a_{v2}^\dagger a_{v2} a_{c1} + V_{cv}^{21} a_{v1}^\dagger a_{c2}^\dagger a_{c2} a_{v1} \\ & + V_{cc}^{21} a_{c1}^\dagger a_{c2}^\dagger a_{c2} a_{c1} + V_{vv}^{21} a_{v1}^\dagger a_{v2}^\dagger a_{v2} a_{v1}. \end{aligned} \quad (2.3.30)$$

In Abbildung 2.3 sind die verschiedenen Energie-Verschiebungen aufgeführt. Der Grundzustandsenergie wie die Anregungsenergie erfährt eine Verschiebung und infolgedessen auch die Übergangsenergie, die vom jeweils anderen Elektron erhöht oder erniedrigt wird.

Die Nicht-Diagonal-Elemente V_F^{12} , die sogenannte Förster-Kopplung, verändern die Dynamik der isolierten Zwei-Niveau-Systeme stark. Durch ihre Nicht-Diagonalität werden die Zwei-Niveau-Systeme in ein 4-Niveau-System verwandelt, können also nicht mehr unabhängig voneinander angeregt werden. In Abbildung 2.4 ist die Wirkung der Förster-Kopplung schematisch dargestellt. Wenn ein Elektron in einem Quantenpunkt angeregt wird, so geht mit einer von dem Betrag der Förster-Kopplung abhängigen Wahrscheinlichkeit die Anregung auf den zweiten Quantenpunkt über. Eine isolierte Anregung ist nicht mehr möglich. Der angeregte Zustand wird zu einem nicht-lokalen Zustand.

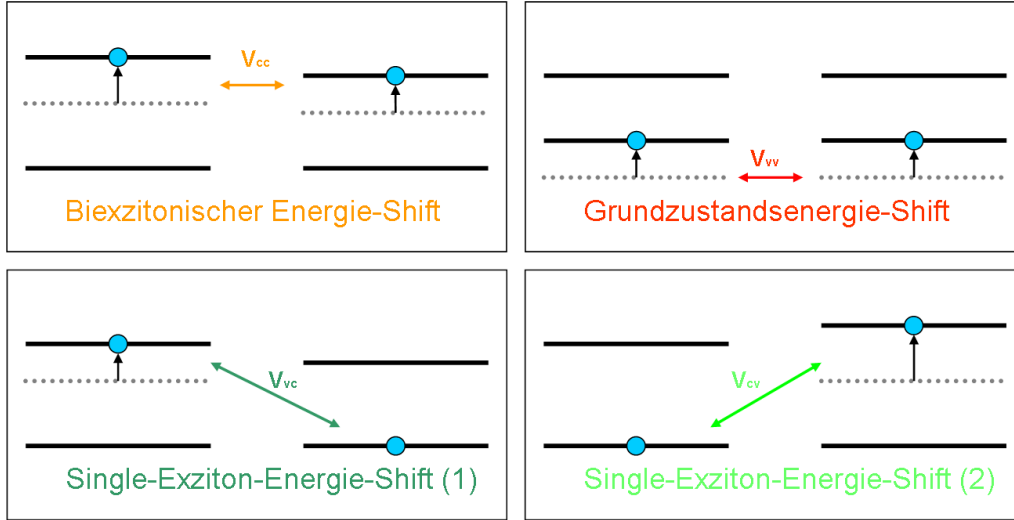


Abbildung 2.3: Energie-Renormalisierungen

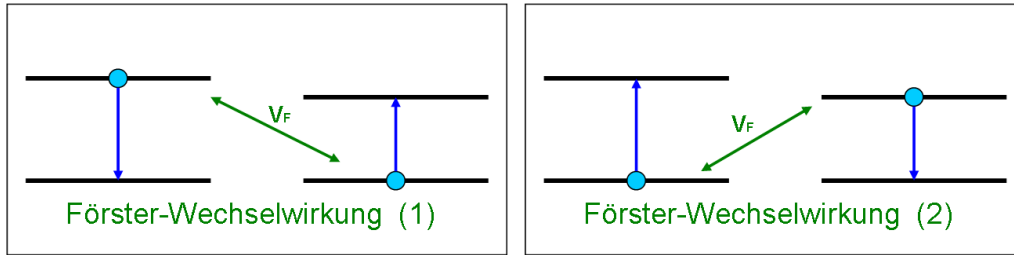


Abbildung 2.4: Förster-Wechselwirkung

2.3.3 Quantisierung von H_p

Das elektromagnetische Feld wird mittels einer Modenentwicklung des Vektorpotentials quantisiert ([SZ97], [Hak73], [VWW01], [RÖ5]). Obwohl es sich im Falle des in einem Halbleiter eingebetteten Quantenpunktes um ein dispersives Medium mit einer möglicherweise ortsabhängigen Dielektrizitätskonstante ϵ handelt, wird vor dem Hintergrund, daß die durch die veränderte Dielektrizitätskonstante hervorgerufenen Effekte klein gegen resonante Effekte im Quantenpunkt sind, das Strahlungsfeld im Vakuum quantisiert, als grundlegendes Beispiel für ein vollständiges System.¹ Das Vektorpotential wird nach Lösungen der homogenen Wellengleichung entwickelt:

$$\square \underline{A} = \Delta \underline{A}(r, t) - \frac{1}{c_0^2} \partial_t^2 \underline{A}(r, t) = 0. \quad (2.3.31)$$

Die einfachste Entwicklung ist eine Superposition von ebenen Wellen, mit Hilfe derer das Vektorpotential ausgedrückt wird. Die Zeitabhängigkeit steckt in der komplexwertigen, dimensionslosen Amplitudenfunktion $C_{\underline{k}\mu}(t)$:

$$\underline{A}(r, t) = \sum_{\underline{k}\mu} \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_{\underline{k}}\epsilon_0 V}} \underline{e}_{\underline{k}\mu} C_{\underline{k}\mu}(t) e^{i\underline{k}\cdot\underline{r}} + c.c.. \quad (2.3.32)$$

¹Für eine vollständige Beschreibung der Quantisierung in einem dispersiven Medium, siehe [HB92].

$\underline{e}_{\underline{k}\mu}$ bezeichnet den Polarisationsvektor in Abhängigkeit von der Wellenzahl $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ und der Richtung μ . Der Faktor $\sqrt{\hbar/2\omega_k\epsilon_0 V}$ stellt die Einheit der Hamiltonfunktion (Energie) sicher. Die komplexwertigen Amplitudenfunktionen werden in bosonische Erzeuger- und Vernichter-Operatoren²

$$C_{\underline{k}\mu}(t) \rightarrow c_{\underline{k}\mu}(t), \quad (2.3.33)$$

$$C_{\underline{k}\mu}^*(t) \rightarrow c_{\underline{k}\mu}^\dagger(t), \quad (2.3.34)$$

überführt, die den folgenden Vertauschungsrelationen genügen:

$$\left[c_{\underline{k}\mu}^{(\dagger)}, c_{\underline{k}'\mu'}^{(\dagger)} \right]_- = 0 \quad (2.3.35)$$

$$\left[c_{\underline{k}\mu}, c_{\underline{k}'\mu'}^\dagger \right]_- = \delta_{\underline{k},\underline{k}'} \delta_{\mu,\mu'}, \quad (2.3.36)$$

so daß das Vektorpotential und somit das elektrische und magnetische Feld über die bekannten Relationen

$$\underline{E}(\underline{r}, t) = -\partial_t \underline{A}(\underline{r}, t) \quad (2.3.37)$$

$$\underline{B}(\underline{r}, t) = \nabla \times \underline{A}(\underline{r}, t) \quad (2.3.38)$$

folgende Formen annehmen:

$$A(\underline{r}) = \sum_{\underline{k}\mu} \frac{E_q}{\omega_k} \underline{e}_{\underline{k}\mu} \left\{ c_{\underline{k}\mu} e^{i\underline{k}\cdot\underline{r}} + c_{\underline{k}\mu}^\dagger e^{-i\underline{k}\cdot\underline{r}} \right\} \quad (2.3.39)$$

$$E(\underline{r}) = i \sum_{\underline{k}\mu} E_q \underline{e}_{\underline{k}\mu} \left\{ c_{\underline{k}\mu} e^{i\underline{k}\cdot\underline{r}} - c_{\underline{k}\mu}^\dagger e^{-i\underline{k}\cdot\underline{r}} \right\} \quad (2.3.40)$$

$$B(\underline{r}) = i \sum_{\underline{k}\mu} \frac{E_q}{\omega_k} \underline{k} \times \underline{e}_{\underline{k}\mu} \left\{ c_{\underline{k}\mu} e^{i\underline{k}\cdot\underline{r}} - c_{\underline{k}\mu}^\dagger e^{-i\underline{k}\cdot\underline{r}} \right\}, \quad (2.3.41)$$

wobei $E_q = \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\epsilon_0 V}}$ die Vakuumfeld-Amplitude bezeichnet. Nutzt man diese operatorwertigen Ausdrücke, setzt sie in 2.3.8 ein, beachtet die Dipolnäherung, so ergibt sich für den Hamiltonoperator nach einer Rechnung, die im Appendix A.4 beschrieben ist, die Form:

$$H_p = \sum_{\underline{k}\mu} \hbar\omega_k \left\{ c_{\underline{k}\mu}^\dagger c_{\underline{k}\mu} + \frac{1}{2} \right\}. \quad (2.3.42)$$

Der Grundzustandsbeitrag $\frac{\hbar\omega_k}{2}$ für jede Mode k des Strahlungsfeldes, der aus der Energie-Zeit-Unschärfe resultiert, würde bei einer unendlichen Anzahl von Moden die Summe im Hamiltonoperator divergieren lassen. Die konstante Grundzustandsenergie wird im weiteren vernachlässigt, weil Konstanten, die in jedem Fall mit Operatoren tauschen, auf die Dynamik eines Systems keinen Einfluß haben können. Der Hamiltonoperator kann so geeicht werden, daß die Grundzustandsenergie des System nullgesetzt wird [Kib70]. Folgender Ausdruck wird also im weiteren für den Hamiltonoperator des freien Lichtfeldes verwendet:

$$H_p = \sum_{\underline{k}\mu} \hbar\omega_k c_{\underline{k}\mu}^\dagger c_{\underline{k}\mu}. \quad (2.3.43)$$

²Operatoren werden in dieser Arbeit nicht extra gekennzeichnet.

2.3.4 Quantisierung von H_{e-p}

Die Ergebnisse aus den Abschnitten 2.3.1 und 2.3.3 können direkt verwendet werden, um die Elektron-Licht-Wechselwirkung in den Formalismus der zweiten Quantisierung zu überführen. Verwendet man die Definitionen der fermionischen Feldoperatoren in 2.3.14, setzt diese in die Gleichung 2.3.9 ein, so erhält man die Elektron-Licht-Wechselwirkung als Summe eines reinen Intraband- ($\lambda' = \lambda$) und Interband-Anteiles ($\lambda' \neq \lambda$) [Rit06]:

$$H_{e-p} = -q \sum_{\lambda} |\xi_{\lambda}(\underline{R})|^2 \underline{R} \cdot \underline{E}(\underline{r}_n) a_{\lambda}^{\dagger} a_{\lambda} + \sum_{\lambda, \lambda'} \xi_{\lambda}^*(\underline{R}) \xi_{\lambda'}(\underline{R}) \underline{d}_{\lambda\lambda'} \cdot \underline{E}(\underline{r}_n) a_{\lambda}^{\dagger} a_{\lambda'}(t). \quad (2.3.44)$$

Hier wurde die Einhüllenden-Näherung und die Orthogonalität der Blochfunktionen nach einer Variablensubstitution ausgenutzt. Eine detaillierte Rechnung findet sich im Appendix A.6. Nun kann man die Definition des quantisierten elektrischen Feldes aus 2.3.40 einsetzen und eine Abkürzung für die Matrixelemente einführen:

$$M_{k\mu n}^{\lambda\lambda'} = iE_q X_{\lambda\lambda'} \underline{\epsilon}_{k\mu} \cdot \underline{d}_{\lambda\lambda'} e^{-i\mathbf{k} \cdot \underline{r}_{0n}} \quad (2.3.45)$$

$$M_{k\mu n}^{\lambda'\lambda} = iE_q X_{\lambda'\lambda} \underline{\epsilon}_{k\mu} \cdot \underline{d}_{\lambda'\lambda} e^{i\mathbf{k} \cdot \underline{r}_{0n}} = - \left(M_{k\mu n}^{\lambda\lambda'} \right)^* . \quad (2.3.46)$$

Der Intrabandanteil ist ein reiner Transportanteil, der in den hier gemachten Näherungen vernachlässigbar ist. Die Elektron-Licht-Wechselwirkung läßt sich für Zwei-Niveau-Systeme (v,c) wie folgt zusammenfassen:

$$H_{e-p} = \sum_{kn} \left[M_{kn}^{vc} c_k - M_{kn}^{vc} c_k^{\dagger} \right] a_{vn}^{\dagger} a_{cn} \quad (2.3.47)$$

$$+ \sum_{kn} \left[M_{kn}^{cv} c_k - M_{kn}^{cv} c_k^{\dagger} \right] a_{cn}^{\dagger} a_{vn}, \quad (2.3.48)$$

wobei die Eigenschaften des Quantenpunktes, sein Dipolmoment, seine Ausdehnung, der Überlapp der Einhüllenden verschiedener Elementarzellen, in das Matrixelement eingehen. Die Polarisationen werden für jeden Quantenpunkt n gezählt, wie für jede Mode k des anregenden Feldes. Die Zeitabhängigkeit aller Operatoren ergibt sich aus den Heisenberg-Bewegungsgleichungen. Im Gegensatz zum semiklassischen Grenzfall, in welchem aus $\Omega = M_k^{vc} \langle c_k^{\dagger} \rangle$ die Rabi-Frequenz resultiert und das photonische Feld unabhängig vom elektronischen gedacht wird, gehen in die hier berechnete Dynamik des anregenden Feldes alle quantenoptische Effekte direkt über die mikroskopischen Polarisationen ein.

2.4 Formalismus

2.4.1 Die Dichtematrix

Zur Berechnung der Erwartungswerte wird der Dichtematrixformalismus verwendet [CT92], wobei im Heisenberg-Bild sowohl der Dichteoperator ρ wie die Zustandsfunktion des Systems zeitlich konstant sind, die zeitliche Dynamik also von den Operatoren getragen wird. Der Erwartungswert wird, da es sich beim betrachteten System im allgemeinen um einen gemischten Zustand handelt, über den statistischen Operator ermittelt. Der statistische Operator lässt sich aufgrund seiner Projekteigenschaften allgemein durch ein den Zustandsraum aufspannendes Orthonormalsystem $\{|n\rangle\}$ darstellen [FS90]:

$$\rho = \sum_{mn} \rho_{nm} |n\rangle \langle m| \quad (2.4.49)$$

und somit der Erwartungswert über

$$\langle A \rangle = \text{Tr} [\rho A] \quad (2.4.50)$$

ausrechnen. Die Dynamik des Erwartungswerte lässt sich nun über die Heisenberg-Bewegungsgleichung ermitteln.

2.4.2 Heisenberg-Bewegungsgleichung

Der Hamilton-Operator aus der Gleichung 2.3.5 vereinfacht sich für einen isolierten Quantenpunkt mit einem Elektron, das den Quantenpunkt nicht verlassen kann, zu:

$$\begin{aligned} H &= H_e + H_{e-p} + H_p \\ &= \hbar\omega_c a_c^\dagger a_c + \hbar\omega_v a_v^\dagger a_v + \sum_k \hbar\omega_k c_k^\dagger c_k + \sum_k [M_k^{vc} a_v^\dagger a_c + M_k^{cv} a_c^\dagger a_v] [c_k - c_k^\dagger]. \end{aligned}$$

Der Summationsindex k ist ein Multiindex und schließt die Polarisation ($k=k,\mu$) ein. Die Zeitabhängigkeit der Erzeuger- und Vernichtoperatoren des Lichtfeldes ergeben sich aus den Bewegungsgleichungen und v und c markieren jeweils die Erzeuger- und Vernichtoperatoren der Elektronen für das Valenz- (v) und Leitungsband (c). Unter der Verwendung der Heisenberg-Bewegungsgleichung³:

$$-i\hbar\partial_t a_i^\dagger a_j = [H, a_i^\dagger a_j] \quad (2.4.51)$$

lassen sich über die bosonischen und fermionischen Vertauschungsregeln die verschiedenen Bewegungsgleichungen im Heisenberg-Bild [Sch05] aufstellen:

$$i\hbar\partial_t a_c^\dagger = -\hbar\omega_c a_c^\dagger - \sum_{k'} M_{k'}^{vc} (a_c^\dagger c_{k'} - a_c^\dagger c_{k'}^\dagger) \quad (2.4.52)$$

$$i\hbar\partial_t c_{k'}^\dagger = -\hbar\omega_{k'} c_{k'}^\dagger - M_{k'}^{vc} a_v^\dagger a_c - M_{k'}^{cv} a_c^\dagger a_v. \quad (2.4.53)$$

Die sich aus den Bewegungsgleichungen ergebenden Differentialgleichungssysteme hängen von der Komplexität und der Anzahl der die Dynamik des Systems bestimmenden Wechselwirkungen ab. In den meisten Fällen müssen Näherungsverfahren eingesetzt werden, von denen vier der wichtigsten im folgenden Abschnitt kurz vorgestellt werden.

³Eine explizite Zeitabhängigkeit der Operatoren liegt nicht vor.

2.5 Approximationsverfahren

2.5.1 Rotating-Wave-Approximation

Eine wichtige Approximation ist die Rotating-Wave-Approximation (RWA) [Lou90]. Man wählt mittels einer Koordinatentransformation für ein rotierendes Koordinatensystem (der „rotating frame“) die Frequenz ω_R und spaltet die Erwartungswerte in einen sich zeitlich langsam veränderlichen und in einen rotierenden Teil auf. Die Rotationsrichtung (negativ, positiv) hängt von der Prozeßart ab (Emission, Absorption), wobei Dichten generell als langsam veränderliche Größen angenommen werden können. Lichtoperatoren rotieren mit der Frequenz ihrer Mode (Lösung der Heisenberg-Bewegungsgleichung). Beispiele:

$$\langle a_v^\dagger a_v c_k^\dagger \rangle \rightarrow \langle a_v^\dagger a_v c_k^\dagger \rangle_R e^{i\omega_k t} \quad (2.5.54)$$

$$\langle a_v^\dagger a_c c_k^\dagger \rangle \rightarrow \langle a_v^\dagger a_c c_k^\dagger \rangle_R e^{i(\omega_k - \omega_R)t}. \quad (2.5.55)$$

Die Approximation besteht nun darin, jene Größen zu vernachlässigen, die schneller rotieren als der Rotating-Frame, also Größen mit Frequenzen $|\omega| \gg |\omega_R|$:

$$\langle A \rangle \rightarrow \langle A \rangle_R e^{-i(\omega_k + \omega_R)t} \approx 0. \quad (2.5.56)$$

Man begründet die Vernachlässigung damit, daß sich schnell rotierende Anteile im Mittel aufheben und somit nur einen sehr geringen Beitrag zum Mittelwert (Erwartungswert) leisten [F05].

2.5.2 Korrelationsentwicklung

Schon die Bewegungsgleichungen 2.4.53 für einen Operator lassen erkennen, daß beim Aufstellen der Bewegungsgleichungen in einem System mit einer Wechselwirkung zwangsläufig ein Hierarchieproblem die Folge ist. Es stellt sich kein geschlossenes Differentialgleichungssystem ein, da eine Bewegungsgleichung nter-Ordnung stets an eine n+1-Größe koppelt und so die Bewegungsgleichung der nächst höheren Ordnung gelöst werden muß. Die Bewegungsgleichungen müssen also ab einer bestimmten Ordnung genähert werden. Ein mögliches Näherungsverfahren ist die Korrelationsentwicklung [KJHK99], die nach folgendem Schema vorgeht:

$$\begin{aligned} \langle 1 \rangle &= \langle 1 \rangle^c \\ \langle 2 \rangle &= \langle 1 \rangle^c \langle 1 \rangle^c + \langle 2 \rangle^c \\ \langle 3 \rangle &= \langle 1 \rangle^c \langle 1 \rangle^c \langle 1 \rangle^c + \langle 1 \rangle^c \langle 2 \rangle^c + \langle 3 \rangle^c \\ \langle 4 \rangle &= \langle 1 \rangle^c \langle 1 \rangle^c \langle 1 \rangle^c \langle 1 \rangle^c + \langle 1 \rangle^c \langle 3 \rangle^c + \langle 2 \rangle^c \langle 2 \rangle^c + \langle 4 \rangle^c. \end{aligned}$$

Wenn nun alle Korrelationsterme ab der 4.Ordnung vernachlässigt werden, ist das Differentialgleichungssystem geschlossen und die Bewegungsgleichungen können gelöst werden.

2.5.3 Born-Approximation

Eine andere Möglichkeit, das Hierarchieproblem zu lösen, ist die Born-Approximation anzuwenden. Diese geht davon aus, daß bedingte Wahrscheinlichkeiten unter bestimmten Voraussetzungen, einfache Wahrscheinlichkeiten werden [VWW01]. Beispielsweise können Größen der Art $\langle a_v^\dagger a_v c_k^\dagger c_k^\dagger c_k c_k \rangle$ entkoppelt werden, falls die Zahl der Photonen $\langle c_k^\dagger c_k \rangle$ viel größer als die der Elektronen ist. Absorptions- und Emissionsprozesse des elektronischen Systems verändern das photonische Feld unter diesen Voraussetzungen nur gering und die bedingte Wahrscheinlichkeit kann als

$$\langle a_v^\dagger a_v c_k^\dagger c_k^\dagger c_k c_k \rangle = \langle a_v^\dagger a_v \rangle \langle c_k^\dagger c_k c_k c_k \rangle + \langle a_v^\dagger a_v c_k^\dagger c_k^\dagger c_k c_k \rangle^c \quad (2.5.57)$$

geschrieben werden [RSK⁺05]. Je nach Problemstellung kann nun die Korrektur vernachlässigt bzw. miteinbezogen werden. In Systemen mit nur einer Wechselwirkung, die in dieser Arbeit durchgängig behandelt werden, kann auf diese Weise das Hierarchie-Problem gelöst werden.

2.5.4 Markov-Näherung

Eine bewährte Näherung zur Lösung von Differentialgleichung der Art:

$$i\hbar\partial_t\langle O \rangle = \hbar\omega\langle O \rangle + P(t), \quad (2.5.58)$$

wobei $P(t)$ eine Inhomogenität darstellt, ist über formale Integration die Gedächtniseffekte im Quantensystem, also den Beitrag von $P(t)$ für $t < t_0$ zu vernachlässigen. Es ergibt sich als exakte Lösung, indem formal integriert wird:

$$\langle O \rangle(t) - \underbrace{\langle O \rangle(-\infty)}_{=0} = -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t dt' P(t') e^{i\omega(t'-t)}.$$

Man führt eine Variablensubstitution durch $s = t - t' \rightarrow ds = -dt'$ und erhält:

$$\langle O \rangle(t) = \frac{i}{\hbar} \int_{\infty}^0 ds P(t-s) e^{-i\omega s} = -\frac{i}{\hbar} \int_0^{\infty} ds P(t-s) e^{-i\omega s}.$$

Die Markovnäherung ist nun gültig, falls die Inhomogenität sich zeitlich viel langsamer verändert als die durch die freie Energie der betrachteten Größe erzwungene Oszillation rotiert, insofern die Inhomogenität annähernd keine s -Abhängigkeit besitzt und aus dem Integral gezogen werden kann:

$$\langle O \rangle(t) = -\frac{i}{\hbar} P(t) \underbrace{\int_0^{\infty} ds e^{-i\omega s}}_{=\zeta(\omega)}.$$

$\zeta(\omega)$ ist die Heitler-Zeta-Funktion [Ric05]. Zur Auswertung führt man einen Konvergenz erzeugenden Faktor γ ein, den man nach Integration wieder gegen Null gehen läßt:

$$\zeta(\omega) = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{1}{i\omega - \gamma} = \pi\delta(\omega) - i\mathcal{P}\frac{1}{\omega}.$$

Die Heitler-Zeta-Funktion ist eine Darstellung der Delta-Funktion plus dem Cauchy-Hauptwert. Üblicherweise wird der Cauchy-Hauptwert vernachlässigt und das Integral als Delta-Funktion für die freie Energie interpretiert und als Lösung erhält man:

$$\langle O \rangle(t) = -\frac{i}{\hbar} \pi\delta(\omega) P(t). \quad (2.5.59)$$

2.6 Dämpfung des elektronischen Systems

Dissipative Prozesse können über eine System-Bad-Wechselwirkung beschrieben. Das Bad entzieht dem System solange Energie, bis sich dieses wieder im Grundzustand befindet [SZ97]. Das System wird mit dem Dichtematrix-Formalismus beschrieben 2.4.1. Der Dichteoperator für das gesamte System ρ_{SR} setzt sich aus dem Dichteoperator für das Bad ρ_R und für das System ρ_S zusammen:

$$\rho_{SR} = \rho_S \otimes \rho_R.$$

Die Veränderung des Dichteoperators errechnet sich über die Liouville-von-Neumann-Gleichung [Sch05]:

$$i\hbar\partial_t\rho_{SR} = [H(t), \rho_{SR}(t)].$$

Formal integriert ergibt dies:

$$\rho_{SR}(t) - \rho_{SR}(t_i) = -\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^t dt' [H(t'), \rho_{SR}(t').]$$

Diese Lösung kann wieder in die Liouville-von-Neumann-Gleichung eingesetzt werden:

$$\partial_t \rho_{SR}(t) = -\frac{i}{\hbar} [H(t), \rho_{SR}(t_i)] - \frac{1}{\hbar^2} \int_{t_i}^t dt' [H(t), [H(t'), \rho_{SR}(t')]]. \quad (2.6.60)$$

Dies gilt allgemein. Für dissipative Prozesse wird ein Hamilton-Operator gewählt, der die Wechselwirkung mit dem Bad beschreibt, im folgenden H_D genannt. Man nimmt an, daß die Wirkung von H_D klein ist [SZ97]. Als Ansatz für den Dichteoperator wird

$$\rho_{SR}(t) = \rho_S(t) \otimes \rho_R(t_i) + \rho_d(t),$$

wobei grundsätzlich $\text{Tr}_R[\rho_{SR}] = \rho_S$ und $\text{Tr}_S[\rho_{SR}] = \rho_R$ erfüllt sein muß, also $\text{Tr}_R[\rho_d] = 0$ und ρ_d von höherer Ordnung in H_D ist. Setzt man den Ansatz für den Dichteoperator in die Gleichung 2.6.60, berücksichtigt nur Terme in H_D bis zur 2. Ordnung und bildet die Spur über das Bad, erhält man:

$$\begin{aligned} \partial_t \rho_S(t) = & -\frac{i}{\hbar} \text{Tr}_R \left[[H_D(t), \rho_S(t_i) \otimes \rho_R(t_i)] \right] \\ & - \frac{1}{\hbar^2} \int_{t_i}^t dt' \text{Tr}_R \left[[H_D(t), [H_D(t'), \rho_S(t') \otimes \rho_R(t')]] \right]. \end{aligned} \quad (2.6.61)$$

Die dissipative Wirkung des Bades auf das elektronische System wird durch diese Integro-Differentialgleichung berechnet. Nun muß ein Wechselwirkungs-Hamilton-Operator gewählt werden.

Dissipative Prozesse entstehen zum Beispiel über ein radiatives Dephasing, hier interpretiert als eine Mode, die eine andere räumliche Ausbreitungsrichtung besitzt und nicht mit dem anregenden Feld wechselwirkt. Spontane Emission baut angeregte Zustände durch die dissipative Mode ab. Für den hier vorliegenden Fall werden dissipative Moden angenommen, die über den Dipol-Operator mit dem elektronischen System koppeln. In Rotating-Wave-Approximation lautet die Gleichung in 2.3.48:

$$H_{e-p} = - \sum_k \left[M_k^R a_v^\dagger a_c \tilde{c}_k^\dagger + M_k^{R*} a_c^\dagger a_v \tilde{c}_k \right] \quad (2.6.62)$$

mit $M_k^R = M_k^{vc} e^{-i(\omega_R - \omega_k)t}$. Die Oszillation ist also in die Matrixelemente gezogen worden. Diese Wechselwirkung wird in Gleichung 2.6.61 eingesetzt und ausgewertet, indem die Kommutatoren ausgerechnet werden und die Spur gebildet wird. Im Appendix A.7 befindet sich eine ausführliche Darstellung der Rechnung. Hier wird als Bad ein thermisches Lichtfeld genommen, das der Bose-Einstein-Statistik genügt (Appendix A.8 für Details). Die mittlere Besetzungszahl in der Mode hängt also nur noch von der Temperatur ab. Das Zeitintegral in Gleichung 2.6.61 wird mittels der Markov-Näherung gelöst und der Cauchy-Hauptwert vernachlässigt. Da nur dissipative Prozesse

interessieren, also ein Energie-Verlust des elektronischen Systems zum Bad, bleiben nur die Terme der spontanen Emission übrig und für die Zeitdynamik des Bad-Operators ergibt sich:

$$\partial_t \rho_S(t) = -\frac{\pi}{\hbar^2 c} \sum_k \delta(k - k_0) |M_k^R|^2 \left[\rho_S a_c^\dagger a_v a_v^\dagger a_c - a_v^\dagger a_c \rho_S a_c^\dagger a_v \right]. \quad (2.6.63)$$

Im letzten Schritt wird das Licht-Matrix-Kopplungselement ausgewertet. Im Appendix A.9 ist die Rechnung ausführlich beschrieben. Hierfür wird die Summe in ein Integral überführt, die Definition aus A.6 eingesetzt und das Integral in Kugelkoordinaten berechnet. Das Resultat lautet für einen isoliertes Zwei-Niveau-System mit nur einem Elektron:

$$\partial_t \rho_S(t) = -\frac{\Gamma}{2} \left[\rho_S a_c^\dagger a_v a_v^\dagger a_c - a_v^\dagger a_c \rho_S a_c^\dagger a_v \right] + \text{h.a.},$$

wobei der Einsteinkoeffizient der spontanen Emission: $\Gamma = \frac{4 |\epsilon_{k\mu}|^2 |d_{vc}|^2 |X_{vc}|^2 \omega_0^3}{4\pi\epsilon_0\epsilon_m \cdot 3\hbar c^3}$ lautet. Zur Auswertung werden die Erwartungswerte der entsprechenden Dichtematrix-Elemente gebildet:

$$\partial_t \langle v | \rho_S | v \rangle = \partial_t \langle a_v^\dagger a_v \rangle = -\Gamma \langle a_v^\dagger a_v \rangle + \Gamma = \Gamma \langle a_c^\dagger a_c \rangle \quad (2.6.64)$$

$$\partial_t \langle c | \rho_S | c \rangle = \partial_t \langle a_c^\dagger a_c \rangle = -\Gamma \langle a_c^\dagger a_c \rangle \quad (2.6.65)$$

$$\partial_t \langle v | \rho_S | c \rangle = \partial_t \langle a_v^\dagger a_c \rangle = \frac{-\Gamma}{2} \langle a_v^\dagger a_c \rangle. \quad (2.6.66)$$

Die Lösung der Differentialgleichung unter Verwendung von $\langle a_v^\dagger a_v \rangle + \langle a_c^\dagger a_c \rangle = 1$ zeigt insofern den erwarteten exponentiellen Zerfall:

$$\langle a_c^\dagger a_c \rangle = e^{-\Gamma t} \quad (2.6.67)$$

mit der erfüllten Anfangsbedingung $\langle a_c^\dagger a_c \rangle(0) = 1$, für jeweils n Photonen.

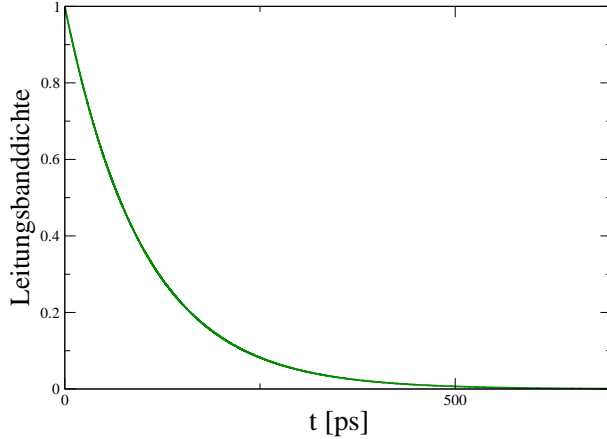


Abbildung 2.5: Radiativer Zerfall in einem Zwei-Niveau-System für verschiedene Photonanzahlen

Im Appendix A.10 sind die entsprechenden Dämpfungen für zwei gekoppelte Quantenpunkte aufgeführt, die je nach Pfad entsprechend stark oder schwach ausfallen können.

In Abbildung 2.5 ist die Funktion aus Gleichung 2.6.67 geplottet. Falls das Bad dem System lediglich Energie entzieht, also kein Photon hinzufügt, zerfällt die Leitungsbanddichte vollständig ($n=0$). Wegen der spontanen Emission kann die Anregung im System nicht erhalten bleiben. Die Zerfallsgeschwindigkeit hängt von dem Einstein-Koeffizienten ab.

Für gekoppelte Zwei-Niveau-Systeme muß die Dämpfung aus dem Produkt der jeweiligen Dipolmomente errechnet werden, die direkt in den Einstein-Koeffizienten eingehen. Die Rechnung ist aufwendiger, erfolgt jedoch analog und kann nach dem vorgestellten Schema durchgeführt werden. Im Appendix

3 Das Photonenfeld

3.1 Charakterisierung des Photonenfeldes - $g^{(2)}$

Das Photonenfeld kann sich in verschiedenen Zuständen befinden, d.h. das Licht wird durch unterschiedliche Statistiken beschrieben, die jeweils spezifische Eigenschaften besitzen ([SZ97], [VWW01], [R05] und über Einzel-Photon-Zähl-Module [LZLW05]). Eine Möglichkeit herauszufinden, um welche Art Photonenfeld es sich im jeweiligen Fall handelt, ist das Hanbury Brown-Twiss Experiment [BT56]. Der Versuchsaufbau des Experimentes ist in Abbildung 3.1 dargestellt. Er

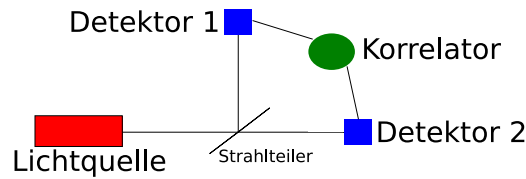


Abbildung 3.1: Das Hanbury Brown-Twiss-Experiment

besteht aus einer Lichtquelle (Source), deren abgestrahltes Licht charakterisiert werden soll. Dieses wird mittels eines Strahlteilers auf zwei Photodetektoren geschickt, die eintreffende Photonen registrieren und dem Correlator ein Signal übermitteln. Der Correlator verknüpft nun die Wahrscheinlichkeit, mit der nach Detektion eines ersten Photons an dem ersten Detektor nach einer Zeitverzögerung τ ein Photon am zweiten Detektor gemessen wird. Das Ergebnis der Messung läßt sich in der Korrelationsfunktion 2. Ordnung zusammenfassen, die zur Charakterisierung des Photonenfeldes dient. Im Falle eines nicht-kommutierenden Quantenfeldes (hier die Bosonen) lautet die Korrelationsfunktion der gezählten Photonen:

$$g^{(2)}(t + \tau) = \frac{\langle c^\dagger(t + \tau)c^\dagger(t)c(t)c(t + \tau) \rangle}{\langle c^\dagger(t)c(t) \rangle^2}$$

Im folgenden wird die Zeitabhängigkeit sowie die Zeitverzögerung vernachlässigt, also ein stationärer Fall behandelt und eine zeitgleiche Messung durchgeführt, also $\tau = 0$ gesetzt:

$$g^{(2)} = \frac{\langle c^\dagger c^\dagger c c \rangle}{\langle c^\dagger c \rangle^2}. \quad (3.1.1)$$

Mit Hilfe von $g^{(2)}$ lassen sich nun die Lichtquellen anhand ihrer ausgestrahlten Lichtstatistik voneinander unterscheiden. Die Korrelationsfunktion 2. Ordnung mißt die normierte Abweichung der aufgenommenen Lichtstatistik von der Poisson-Verteilung. Diese beschreibt in Abhängigkeit von einem Mittelwert (bspw. die mittlere Photonenzahl) $|\alpha|^2$ mit welcher Wahrscheinlichkeit $|C_n|^2 = |\langle n|\alpha \rangle|^2$ die Nummernzustände besetzt sind [Lou90]:

$$|C_n|^2 = e^{-|\alpha|^2} \frac{(|\alpha|^2)^n}{n!} \quad (3.1.2)$$

Die gemessene Abweichung ist insofern ein Maß für die Ordnung im Lichtfeld, also wie sich bei einer vorgegebenen mittleren Photonenzahl die Gesamtzahl auf die Zustände verteilt. Um den

Zusammenhang zur Zählstatistik noch verdeutlichen, kann $g^{(2)}$ mit Hilfe der Varianz $\langle(\Delta n)^2\rangle = \langle n^2\rangle - \langle n\rangle^2$ ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} g^{(2)} &= \frac{\langle c^\dagger c^\dagger c c \rangle}{\langle c^\dagger c \rangle^2} = \frac{\langle c^\dagger c c^\dagger c \rangle - \langle c^\dagger c \rangle^2}{\langle c^\dagger c \rangle^2} = \frac{\langle c^\dagger c c^\dagger c \rangle - \langle c^\dagger c \rangle^2 + \langle c^\dagger c \rangle^2 - \langle c^\dagger c \rangle^2}{\langle c^\dagger c \rangle^2} \\ &= \frac{\langle(\Delta n)^2\rangle - \langle n \rangle^2}{\langle n \rangle^2} + 1. \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

Die Varianz ist ein Maß für die Streuung um den jeweils gegebenen Mittelwert. Die Korrelationsfunktion $g^{(2)}$ ist so gewählt, daß sie für eine Poisson-Verteilung den Wert 1 annimmt. Nach Definition gelten die Bezeichnungen aus der Tabelle 3.1. Anhand dieser Einteilungen können die

$\langle(\Delta n)^2\rangle - \langle n \rangle^2$	Statistikart	$g^{(2)}$
> 0	Super-Poisson	> 1
$= 0$	Poisson	$= 1$
< 0	Sub-Poisson	< 1

Tabelle 3.1: Statistik-Bezeichnungen

Lichtfelder nun systematisiert werden. Im folgenden werden nun verschiedene Zustände des Lichtfeldes vorgestellt und die entscheidenden Erwartungswerte wie die Korrelationsfunktion 2. Ordnung berechnet.

3.1.1 Lichtfeld im Fockzustand

Der einfachste Zustand, in dem sich ein Photonenfeld befinden kann, ist der Fockzustand. Der Fockzustand, hier 1-modig, wird aus dem Vakuumzustand erzeugt:

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} [c^\dagger(t)]^n |0\rangle \quad (3.1.4)$$

mit $c^\dagger(t) = c^\dagger e^{i\omega t}$ durch die Heisenberg-Bewegungsgleichung zu berechnen. Fockzustände sind Eigenzustände des Besetzungszahloperators $n = c^\dagger c$ und bilden ein Orthogonalsystem

$$\langle m|n\rangle = \delta_{mn}. \quad (3.1.5)$$

Aus der Orthogonalität 3.1.5 folgt, daß die Erwartungswerte der Maxwell-Felder verschwinden. Der Erwartungswert des elektrischen 2.3.40 und des magnetischen Feldes 2.3.41 sind proportional zu $\langle c \rangle - \langle c^\dagger \rangle$, also

$$\langle n|c - c^\dagger|n\rangle = \sqrt{n}\langle n|n-1\rangle - \sqrt{n+1}\langle n|n+1\rangle = 0. \quad (3.1.6)$$

Die Formulierung erzwingt einen Widerspruch zur makroskopischen Elektrodynamik, in der das elektrische Feld im allgemeinen einen Wert ungleich Null einnimmt. Die Intensität als Meßgröße verschwindet nicht. Sie ist proportional zur Teilchenzahl:

$$\langle n \rangle = \langle n|c^\dagger c|n\rangle = n\langle n|n\rangle = n. \quad (3.1.7)$$

Für das Intensitätsquadrat ergibt sich:

$$\langle n^2 \rangle = \langle n|c^\dagger c c^\dagger c|n\rangle = n\langle n-1|c c^\dagger|n-1\rangle = n^2. \quad (3.1.8)$$

Daraus folgt für die Varianz:

$$\langle(\Delta n)^2\rangle = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2 = n^2 - n^2 = 0, \quad (3.1.9)$$

und somit für die Korrelationsfunktion aus 3.1.3:

$$g^{(2)} = 1 - \frac{1}{n}. \quad (3.1.10)$$

Hat ein Lichtfeld im Fockzustand eine mittlere Teilchenzahl von 1, so verschwindet die Korrelationsfunktion. Die Quelle könnte beispielsweise ein Single-Photon-Emitter sein, der nur ein Photon pro Zeitintervall emittiert, so daß niemals zwei Photonen gleichzeitig gemessen werden können. Quellen solch extrem nicht-klassischen Lichtes können Quantenpunkte sein [AFK05].

3.1.2 Kohärentes Licht

Kohärentes Licht kann nicht durch den Fockzustand beschrieben werden. Die Problematik, in der quantenmechanischen Formulierung des Strahlungsfeldes keine Entsprechung zur klassischen Formulierung z.B. eines Laserfeldes zu haben, führte zur Einführung der Glauberzustände [Gla63], die eine Überlagerung von Fockzuständen darstellen. Mit Hilfe einer unitären Transformation

$$U \equiv D(\alpha) = e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a}, \quad (3.1.11)$$

die als Gewichtung innerhalb einer Überlagerung von Fockzuständen interpretiert werden kann, wird ein Glauber-Zustand erzeugt:

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle &= D(\alpha)|0\rangle \\ &= e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

$$= e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} (c^\dagger)^n |0\rangle = e^{-|\alpha|^2/2 + \alpha a^\dagger} |0\rangle, \quad (3.1.13)$$

der Eigenzustand des Vernichtersoperators ist:

$$c |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle \quad (3.1.14)$$

$$\langle \alpha | c^\dagger = \langle \alpha | \alpha^*. \quad (3.1.15)$$

Mit dieser Formulierung findet das kohärente Lichtfeld seinen quantenmechanischen Ausdruck, denn für die Feldstärke gilt nun mit den gegebenen Eigenschaften:

$$\langle \alpha | c - c^\dagger | \alpha \rangle = \alpha^* - \alpha \stackrel{i.a.}{\neq} 0. \quad (3.1.16)$$

Berechnet man die Besetzungswahrscheinlichkeit $|C_m|^2$ bei gegebener mittlerer Photonenzahl $|\alpha|^2$, so folgt aus 3.1.12:

$$|C_m|^2 = |\langle m | \alpha \rangle|^2 = e^{-|\alpha|^2} \frac{(|\alpha|^2)^m}{m!}. \quad (3.1.17)$$

Die Glauber-Zustände entsprechen nach 3.1.2 einer Poisson-Verteilung, so daß $g^{(2)}$ als Maß für die normierte Abweichung von der Poisson-Statistik, die Abweichung von dem klassischen Lichtfeld beschreibt. Für die Intensität im Glauberzustand gilt:

$$\langle n \rangle = \langle \alpha | c^\dagger c | \alpha \rangle = \alpha \langle \alpha | c^\dagger | \alpha \rangle = |\alpha|^2 \langle \alpha | \alpha \rangle = |\alpha|^2, \quad (3.1.18)$$

da die Glauberzustände nach 3.1.12 normiert sind. Für das Intensitätsquadrat ergibt sich:

$$\langle c^\dagger c^\dagger c c \rangle = |\alpha|^2 \langle \alpha | c^\dagger c | \alpha \rangle = |\alpha|^4. \quad (3.1.19)$$

Mit 3.1.1 gilt $g^{(2)} = 1$. Dies entspricht der Erwartung, daß nach einer Strahlungsteilung eines kohärenten Lichtstrahls auf dem einen Detektor genau dann ein Photon gezählt wird, wenn auf den anderen eines eingetroffen ist.

Wegen

$$\langle n^2 \rangle = \langle c^\dagger c^\dagger c c \rangle + \langle n \rangle = |\alpha|^4 + |\alpha|^2 \quad (3.1.20)$$

folgt für die Varianz:

$$\langle (\Delta n)^2 \rangle = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2 = |\alpha|^4 + |\alpha|^2 - |\alpha|^4 = |\alpha|^2. \quad (3.1.21)$$

Die Teilchenzahl ist also nicht mehr exakt bekannt und somit eine zeitliche Entwicklung des Lichtstrahls beschreibbar und $\langle (\Delta n)^2 \rangle - \langle n \rangle = |\alpha|^2 - |\alpha|^2 = 0$, wie in der Tabelle 3.1 angegeben.

3.1.3 Gequetschtes Licht

Die kohärenten Zustände können verallgemeinert werden, um gequetschte Zustände einzuführen [MW95]. Gequetschte Zustände nutzen aus, daß die Amplitudenfunktionen des Lichtfeldes komplexwertig sind. Je nach dem, ob der Real- oder der Imaginärteil der Amplitudenfunktion beachtet wird, kann, ohne die Unschärferelation zu verletzen, die Unschärfe der Amplitude auf Kosten der Phase erhöht, bzw. verringert werden. Um die Erwartungswerte auszurechnen, müssen Zustand wie Operatoren in den gequetschten Zustand überführt werden. Man geht von den Glauberzuständen in Gleichung 3.1.13 aus und transformiert diese ein weiteres Mal mit dem Squeezed-State-Operator

$$D(\alpha) S(z) |0\rangle = |\alpha, z\rangle \quad (3.1.22)$$

mit

$$S(z) = e^{\frac{1}{2}(z^* c^2 - z (c^\dagger)^2)} \quad (3.1.23)$$

$$z = r e^{i\phi}. \quad (3.1.24)$$

Die Lichtoperatoren müssen ebenfalls transformiert werden:

$$C(z) = S(z) c S^\dagger(z), \quad (3.1.25)$$

unter Anwendung des Operator-Expansion-Theorems [MW95]

$$e^{x\hat{A}} \hat{B} e^{-x\hat{A}} = \hat{B} + x [\hat{A}, \hat{B}] + \frac{x^2}{2!} [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \dots \quad (3.1.26)$$

erhält man die transformierten Lichtoperatoren

$$C(z) = \mu c + \nu c^\dagger \quad (3.1.27)$$

$$C^\dagger(z) = \mu c^\dagger + \nu^* c \quad (3.1.28)$$

mit $\mu = \cosh(r)$ und $\nu = e^{i\phi} \sinh(r)$ für die dieselbe Kommutatorrelation wie für die untransformierten Operatoren gilt 2.3.36. Die Rücktransformation lautet:

$$c = \mu C - \nu C^\dagger \quad (3.1.29)$$

$$c^\dagger = \mu C^\dagger - \nu^* C. \quad (3.1.30)$$

Der Pseudo-Vernichter-Operator ist so gewählt, daß der gequetschte Zustand ein Eigenzustand von ihm ist:

$$C|\alpha, z\rangle = (\mu\alpha + \nu\alpha^*)|\alpha, z\rangle. \quad (3.1.31)$$

Nun lassen sich die Erwartungswerte der Teilchenzahlen ausrechnen, wobei nach Definition von μ und ν die Relation $|\mu| - |\nu|^2 = 1$ hilfreich ist. Für den Erwartungswert der Teilchenzahl ergibt sich:

$$\begin{aligned} \langle c^\dagger c \rangle &= \langle \alpha, z | (\mu C^\dagger - \nu^* C) (\mu C - \nu C^\dagger) | \alpha, z \rangle \\ &= (\mu^2 + |\nu|^2) (\mu\alpha^* + \nu^*\alpha) (\mu\alpha + \nu\alpha^*) \\ &\quad - \mu\nu (\mu\alpha^* + \nu^*\alpha)^2 - \nu^*\mu (\mu\alpha + \nu\alpha^*)^2 + |\nu|^2 \\ &= |\alpha|^2 + |\nu|^2. \end{aligned} \quad (3.1.32)$$

Der Erwartungswert der Teilchenzahl hängt also von der Translation des Glauberzustands und von der gewählten Phase des gequetschten Zustandes ab.

Um $g^{(2)}$ auszurechnen, muß die Varianz ermittelt werden. Es ist jedoch einfacher, die Differenz zwischen Varianz und Photonenzahl zu ermitteln, wie sie im Nenner der Korrelationsfunktion 2. Ordnung steht:

$$\langle (\Delta n)^2 \rangle - \langle n \rangle = |\alpha|^2 [-1 + \cosh(2r) - \sinh(2r) \cos(2\beta - \phi)] + \sinh^2(r) \cosh(2r). \quad (3.1.33)$$

Je nach gewähltem Phasenwinkel β ist diese Größe positiv oder negativ. Ein Lichtfeld ist gequetscht, wenn $g^{(2)} < 1$ ist. Dies ist beispielsweise für $\beta = \frac{\phi}{2}$ und großes $|\alpha|^2$ erfüllt. An Gleichung 3.1.33 erkennt man außerdem, daß die Einführung der gequetschten Zustände auch $g^{(2)} > 1$ erlaubt, also Bunching-Effekte nach sich ziehen kann, z.B. falls $\beta = \frac{\phi}{2} + \frac{\pi}{2}$.

3.1.4 Thermisches Licht

Thermisches Licht läßt sich quantenmechanisch nicht über einen reinen Zustand beschreiben, d.h., der Erwartungswert wird über den statistischen Operator ermittelt. Die Form des statistischen Operators hängt von der gewählten Beobachtungsebene ab [FS90] und erhält für das thermische Lichtfeld, entsprechend der Bose-Einstein-Statistik, für eine Mode k^4 folgende Form:

$$\rho_k = \frac{1}{Z} e^{-\beta \hbar\omega_k c_k^\dagger c_k}, \quad (3.1.34)$$

wobei $\beta = \frac{1}{k_B T}$ und Z die Zustandssumme bezeichnet, die hier als Normalisierungsfaktor dient, da die Spur des Statistischen Operators 1 ergeben muß:

$$Z = \text{Tr} \left[e^{-\beta \hbar\omega_k c_k^\dagger c_k} \right] = \sum_n \langle n_k | e^{-\beta \hbar\omega_k c_k^\dagger c_k} | n_k \rangle = \frac{1}{1 - e^{-\beta \hbar\omega_k}}. \quad (3.1.35)$$

Gemäß der Bose-Einstein-Statistik ist die mittlere Photonenzahl [MW95] gegeben durch

$$\bar{n} = \frac{1}{e^{\beta \hbar\omega_k} - 1}, \quad (3.1.36)$$

womit sich die Zustandssumme als:

$$Z = \frac{1}{1 - e^{-\beta \hbar\omega_k}} = \bar{n} + 1 \quad (3.1.37)$$

⁴Die Erweiterung auf mehrere Moden ist ohne Schwierigkeiten durchzuführen. Sie besteht aus einem Produkt der statistischen Operatoren der einzelnen Moden, so daß im Nenner über die verschiedenen Moden summiert wird. Im weiteren Verlauf werden die exemplarischen Rechnungen für eine Mode vorgenommen.

schreiben läßt, und der statistische Operator erhält die bekannte Form mit $\hat{n} = c^\dagger c$:

$$\rho_k = \frac{\bar{n}^{\hat{n}}}{(\bar{n} + 1)^{\hat{n}+1}}. \quad (3.1.38)$$

Der Erwartungswert der mittleren Teilchenzahl läßt sich nun berechnen.

$$\begin{aligned} \langle n \rangle &= \langle c^\dagger c \rangle = \text{Tr} [c^\dagger c \rho] = \sum_n \langle n | c^\dagger c \frac{e^{-\beta \hbar \omega} c^\dagger c}{Z} | n \rangle = \sum_n n \frac{e^{-\beta \hbar \omega} n}{Z} \\ &= \frac{1}{Z} \partial_{-\beta \hbar \omega} Z = \partial_{-\beta \hbar \omega} \ln Z = \bar{n}. \end{aligned} \quad (3.1.39)$$

Hier wurde ausgenutzt, daß die Spurbildung linear ist. Im Teilchenbild ist die Formulierung also konsistent. Der Erwartungswert bei einer gegebenen Temperatur T ist gleich der mittleren Besetzungszahl in dieser Mode. Für das Quadrat der Teilchenzahl ergibt sich:

$$\begin{aligned} \langle n^2 \rangle &= \langle c^\dagger c c^\dagger c \rangle \\ &= \frac{1}{Z} \partial_{-\beta \hbar \omega}^2 Z = \frac{1}{Z} \partial_{-\beta \hbar \omega} [e^{-\beta \hbar \omega} (1 - e^{-\beta \hbar \omega})^{-2}] \\ &= \frac{1}{Z} [e^{-\beta \hbar \omega} (1 - e^{-\beta \hbar \omega})^{-2} + 2 e^{-2\beta \hbar \omega} (1 - e^{-\beta \hbar \omega})^{-3}] \\ &= e^{-\beta \hbar \omega} (1 - e^{-\beta \hbar \omega})^{-1} + 2 e^{-2\beta \hbar \omega} (1 - e^{-\beta \hbar \omega})^{-2} \\ &= \bar{n} + 2\bar{n}^2, \end{aligned} \quad (3.1.40)$$

woraus sich $\langle c^\dagger c^\dagger c c \rangle = \langle c^\dagger c c^\dagger c \rangle - \langle c^\dagger c \rangle^2 = 2\bar{n}^2$ ergibt und für $g^{(2)} = 2$. Die Korrelationsfunktion der 2. Ordnung als bedingte Wahrscheinlichkeit an beiden Detektoren Photonen zu zählen, ergibt also eine erhöhte Photonenzahl am zweiten Detektor, sobald am ersten ein Photon gemessen wurde. Dieser Effekt nennt sich Bunching [R05] und bedeutet, daß thermisches Licht die Detektoren in Klumpen erreicht. Wenn also ein Photon detektiert wird, können zeitnah direkt sehr viele Photonen gezählt werden, erhöht man jedoch die Zeitverzögerung τ , konvergiert $g^{(2)}$ gegen 1 und der Bunching-Effekt verschwindet. Je später man also mißt, desto mehr verpaßt man von dem ausgestrahlten Photonenbündel.

3.1.5 Übersichtstabelle mit den verschiedenen Photonstatistiken

$g^{(2)}$	Bezeichnung	Elektrische Feldstärke $\langle c \rangle$	Intensität $\langle c^\dagger c \rangle$
$= 2$	Thermisches Licht	$= 0$	$= \bar{n}$
$= 1$	Kohärentes Licht	$= \alpha$	$= \alpha ^2$
< 1	Gequetschtes Licht	$= \mu\alpha + \nu\alpha^*$	$= \alpha ^2 + \nu ^2$
$= 1 - \frac{1}{n}$	Licht im Fockzustand	$= 0$	$= n$

Tabelle 3.2: Übersichtstabelle der verschiedenen Photonstatistiken

Zur Übersicht eine kleine Zusammenstellung der verschiedenen Photonstatistiken und Bezeichnungen, die im weiteren Verlauf der Arbeit verwendet werden (\bar{n} ist die mittlere Photonenzahl). Tabelle 3.2 faßt die vorherigen Abschnitten zusammen.

Zur graphischen Visualisierung der verschiedenen Photonstatistiken ist in Abbildung 3.2 ein schematischer Strahlenverlauf dargestellt. Strahlt eine Lichtquelle nur ein Photon pro Zeitintervall aus, mißt man ein extremes Anti-Bunching und die Korrelationsfunktion 2. Ordnung ist null, für eine mittlere Photonenzahl von 1. Gequetschtes Licht hat eine im Vergleich zum kohärenten Licht verminderte Wahrscheinlichkeit, zwei Photonen zeitgleich zu messen. Der Strahl ist gestrichelt. Kohärentes

Licht ist als durchgängiger Strahl gezeichnet. Mißt man ein Photon an einem Detektor, so mißt man auch eines am anderen Detektor. Thermisches Licht nun wird geklumpt ausgestrahlt. Die Photonen kommen bevorzugt in Klumpen am Detektor an. Mißt man also ein Photon an einem Detektor, so gibt es eine erhöhte Wahrscheinlichkeit, mehr Photonen am anderen zu messen, daher ist kein Strahl, sondern ein Photonenhaufen abgebildet.

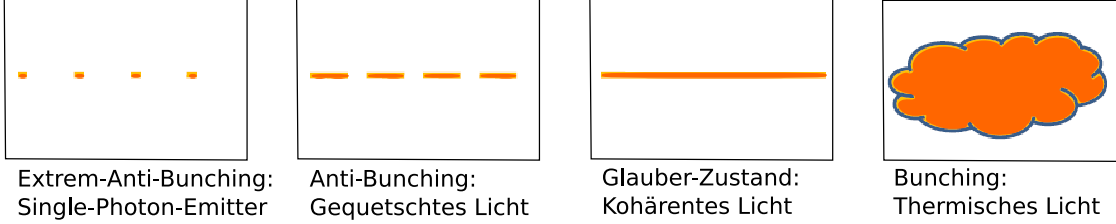


Abbildung 3.2: Visualisierte Photonstatistik

3.2 Lichtpulse

In diesem Abschnitt werden die ersten Schritte unternommen eine vollquantenmechanische Formulierung für einen thermischen Lichtpuls zu finden, mit deren Hilfe die thermische Anregung von Quantenpunkt-Ensembles berechnet werden könnte.

3.2.1 Kohärenter Lichtpuls

Ausgegangen wird von dem quantisierten elektrischen Feld [VWW01]. Die zeitliche Entwicklung eines in x-Richtung propagierenden Lichtpulses ergibt sich mit der Definition aus Gleichung 2.3.40 aus der Heisenberg-Bewegungsgleichung:

$$\begin{aligned} \partial_t \underline{E}(x, t) &= \frac{i}{\hbar} [H_p, \underline{E}(x)] \\ &= i \sum_{k\mu} E_q \underline{e}_{k\mu} \left\{ -i\omega_k c_{k\mu} e^{ikx} - i\omega_k c_{k\mu}^\dagger e^{-ikx} \right\}. \end{aligned}$$

Die Integration führt auf die Lösung:

$$\underline{E}(x, t) = i \sum_{k\mu} E_q \underline{e}_{k\mu} \left\{ c_{k\mu} e^{i(kx - \omega_k t)} - c_{k\mu}^\dagger e^{-i(kx - \omega_k t)} \right\}. \quad (3.2.41)$$

Ganz allgemein lautet ein in positiver x-Richtung propagierender Puls, quantenmechanisch ausgedrückt mit den entsprechenden Moden, dem Quantisierungsvolumen und der aus der Heisenberg-Bewegungsgleichung resultierenden Zeitabhängigkeit in Form von Exponentialfunktionen:

$$\underline{E}(x, t) = i \sum_{n\mu} \sqrt{\frac{\hbar\omega_n}{2\epsilon_0 \mathcal{A}\mathcal{L}}} \underline{e}_{n\mu} \left\{ c_{n\mu} e^{-i\omega_n(t - \frac{x}{c})} - c_{n\mu}^\dagger e^{i\omega_n(t - \frac{x}{c})} \right\} \quad (3.2.42)$$

mit

$$\mathcal{V} = \mathcal{A}\mathcal{L} \quad \text{Quantisierungsvolumen} \quad (3.2.43)$$

$$\omega_n = c k_n \quad \text{Frequenz} \quad (3.2.44)$$

$$k_n = \frac{2\pi}{\mathcal{L}} n \quad \text{Wellenzahl} \quad (3.2.45)$$

$$\Delta k = \frac{2\pi}{\mathcal{L}} \quad \text{Modenabstand.} \quad (3.2.46)$$

Um die Summe in ein Integral zu überführen, wird zuerst eine 1 eingefügt $\Delta k / \Delta k$, um den entsprechenden Modenabstand zu berücksichtigen, der von dem Quantisierungsvolumen abhängt. Hier ist zu beachten, daß auch die Erzeuger- und Vernichter-Operatoren in Abhängigkeit vom Modenabstand quantisiert werden und daher ebenfalls transformiert werden müssen:

$$\underline{E}(x, t) = i \sum_{n\mu} \Delta k \sqrt{\frac{\hbar\omega_n}{2\epsilon_0 \mathcal{A} \Delta k}} \underline{e}_{n\mu} \left\{ \frac{c_{n\mu}}{\sqrt{\Delta k}} e^{-i\omega_n(t-\frac{x}{c})} - \frac{c_{n\mu}^\dagger}{\sqrt{\Delta k}} e^{i\omega_n(t-\frac{x}{c})} \right\}. \quad (3.2.47)$$

Die Summe kann nun als Integral geschrieben werden, wenn man die Länge des Quantisierungsvolumen gegen unendlich gehen läßt, also den Modenabstand auf eine infinitesimale Größe verringert, d.h. $\mathcal{L} \rightarrow \infty$:

$$\underline{E}(x, t) = i \sum_{\mu} \int_0^{\infty} dk \sqrt{\frac{c\hbar k}{4\pi\epsilon_0 \mathcal{A}}} \underline{e}_{\mu}(k) \left\{ c_{\mu}(k) e^{-ik(ct-x)} - c_{\mu}^\dagger(k) e^{ik(ct-x)} \right\}. \quad (3.2.48)$$

Das elektrische Feld sei nun linear polarisiert (z.B. $[e_{\mu}(k)]_y$ und $[e_{\mu}(k)]_z$ fest), unabhängig von der Mode, sowie die Lichtoperatoren unabhängig von der Polarisierung. Die Summe über μ wird durch eine 2 ersetzt und es ergibt sich:

$$\underline{E}(x, t) = i \int_0^{\infty} dk \sqrt{\frac{c\hbar k}{\pi\epsilon_0 \mathcal{A}}} \underline{e}_{n\mu} \left\{ c(k) e^{-ik(ct-x)} - c^\dagger(k) e^{ik(ct-x)} \right\}. \quad (3.2.49)$$

Bevor der Erwartungswert des Lichtfeldes gebildet werden kann, muß die Statistik des Lichtfeldes gewählt werden. Ausgehend von Gleichung 3.2.49 bildet man nun den Erwartungswert mittels der Glauberzustände 3.1.13, ersetzt $\omega_k = ck$, nimmt

$$\alpha(k) = |\alpha(k)| e^{i\phi_k} \quad (3.2.50)$$

$$\alpha(k)^* = |\alpha(k)| e^{-i\phi_k}, \quad (3.2.51)$$

beschränkt sich auf die x-Richtung des elektrischen Feldes und auf eine modenabhängige lineare Polarisierung und erhält:

$$\langle \underline{E}(x, t) \rangle = \sqrt{\frac{c\hbar}{\pi\epsilon_0 \mathcal{A}}} \underline{e}_{\mu} \int_0^{\infty} dk \sqrt{k} |\alpha(k)| \left\{ e^{ik(ct-x)-i\phi_k} - e^{-ik(ct-x)+i\phi_k} \right\}. \quad (3.2.52)$$

Um zum Beispiel einen Gaußpuls zu erhalten, ersetzt man den Betrag der Amplitudenfunktion $|\alpha(k)|$ durch

$$|\alpha(k)| = \sqrt{\frac{N}{\Delta k \sqrt{2\pi}}} e^{-\frac{(k-\bar{k})^2}{2\Delta k^2}}, \quad (3.2.53)$$

wobei $\Delta k = \frac{1}{c\tau}$ (τ ist die Pulsbreite) und N die Anzahl der Photonen in der Mode zählt. Um das Integral zu lösen, nimmt man nun an, daß die Impulsverteilung ausreichend scharf ist, also $\Delta k \ll \bar{k}$ gilt, somit \sqrt{k} durch $\sqrt{\bar{k}}$ ersetzt werden kann. Führt man eine Nulladdition im Exponenten durch und nimmt eine modenunabhängige Phase $\bar{\phi}$ an, so schreibt sich der Erwartungswert des Feldes mit $t_0 = \frac{x}{c}$:

$$\langle \underline{E}(x, t) \rangle = \sqrt{\frac{N\hbar c \bar{k}}{\pi\epsilon_0 \mathcal{A} \Delta k \sqrt{2\pi}}} \underline{e}_{\mu} e^{-\frac{(t-t_0)^2}{2\tau^2}} \sin[c\bar{k}(t-t_0) - \bar{\phi}] \underbrace{\int_0^{\infty} dk e^{-\frac{1}{2(\Delta k)^2} [k-\bar{k}-i(\Delta k)^2(ct-x)]^2}}_{=\sqrt{2\pi}\Delta k}.$$

Führt man das Integral aus, erhält man schließlich die Formulierung eines in positiver x-Richtung propagierenden Gaußpulses mit $\bar{\omega} = ck$, der zum Beispiel ein Quantenpunktsystem mit gewählter Pulsfläche \sqrt{N} anregt:

$$\langle \underline{E}(x, t) \rangle = \sqrt{\frac{\sqrt{2\pi N \Delta k \hbar \bar{\omega}}}{\pi \epsilon_0 \mathcal{A}}} \underline{e}_\mu e^{-\frac{(t-t_0)^2}{2\tau^2}} \sin[\bar{\omega}(t-t_0) - \bar{\phi}] \quad (3.2.54)$$

mit der Einheit

$$[\langle \underline{E}(x, t) \rangle] = \left[\frac{V}{m} \right]. \quad (3.2.55)$$

3.2.2 Thermischer Lichtpuls

Thermische Lichtpulse sind wegen der Energie-Zeit-Unschärfe schwierig zu beschreiben. Da mit gegebener Temperatur, z.B. der eines schwarzen Strahlers, die Besetzungszahlen für jede Mode exakt gegeben sind, kann das System in der Zeit nicht mehr lokalisiert werden. Eine Möglichkeit, dennoch einen solchen Puls zu konstruieren, ist es, den thermischen Lichtpuls als Überlagerung zweier kohärenter Pulse zu fassen. Eine solche propagierende Intensität ergibt sich aus dem inkohärenten Anteil des gewählten Statistischen Operators, der im folgenden Abschnitt zum Ausgangspunkt genommen wird, um die Dynamik einer propagierenden Photondichte zu berechnen.

Diagonalisierung des GKSO

Zur Formulierung eines thermischen Lichtpulses wird der generalisierte kanonische statistische Operator (GKSO) [FS90] hier allgemeiner gewählt als in Gleichung 3.1.34:

$$\mathcal{R}_{\{G\}} = \frac{1}{Z} e^{-\sum_i \lambda_i G_i}, \quad (3.2.56)$$

wobei λ der Lagrangemultiplikator zur ausgesuchten Observablen G_i und Z die normierende Zustandssumme darstellt. Mit der Wahl der Beobachtungsebene werden die Observablen ausgewählt, die im System ausgewertet werden sollen, hier die Intensität $c_i^\dagger c_j$, so daß der generalisierte statistische Operator folgende Form annimmt:

$$\rho = \frac{1}{Z} e^{-\sum_{ij} \lambda_{ij} c_i^\dagger c_j}. \quad (3.2.57)$$

Um die Berechnung der Erwartungswerte zu erleichtern, wird die Matrix λ_{ij} mittels einer unitären Matrix diagonalisiert⁵:

$$\lambda_{ij} = \sum_k \phi_{ik}^* \lambda_k \phi_{kj}. \quad (3.2.58)$$

Für die Operatoren ergibt sich damit:

$$\sum_{ij} \sum_k \underbrace{\phi_{ik}^* \lambda_k \phi_{kj}}_{\lambda_{ij}} c_i^\dagger c_j = \sum_{ijk} \lambda_k \underbrace{(\phi_{ik}^* c_i^\dagger)}_{d_k^\dagger} \underbrace{(\phi_{kj} c_j)}_{d_k} = \sum_k \lambda_k d_k^\dagger d_k. \quad (3.2.59)$$

⁵Dies ist gleichzeitig die Bestimmungsgleichung der unitären Matrix ϕ_{ik} .

Um die Erwartungswerte des Lichtfeldes zu berechnen, muß die Zustandssumme bekannt sein. Sie lautet hier:

$$Z = \text{Tr} \left(e^{-\sum_k \lambda_k d_k^\dagger d_k} \right) = \prod_k \frac{1}{1 - e^{-\lambda_k}}. \quad (3.2.60)$$

In dieser Formulierung verschwinden alle Singletts $\langle c_k^\dagger \rangle$ und folgende Dubletts, da Erzeuger- und Vernichteroperatoren aufgrund der Orthogonalität der Fockzustände im zu bildenden Erwartungswert gleich oft vorkommen müssen:

$$\langle c_k^\dagger c_{k'}^\dagger \rangle = \langle c_k c_{k'} \rangle = 0. \quad (3.2.61)$$

Es bleibt der Erwartungswert der gesuchten Intensität, der nun die inkohärenten Anteile des statistischen Operators über die diagonalisierten Lichtoperatoren berücksichtigt:

$$\langle c_k^\dagger c_{k'} \rangle = \sum_{ml} \phi_{mk} \phi_{k'l}^* \langle d_m^\dagger d_l \rangle. \quad (3.2.62)$$

Aus der Anwendung von Gleichung 3.2.60 folgt nach üblicher Rechnung (vgl. 3.1.39):

$$\langle d_m^\dagger d_l \rangle = \frac{\delta_{ml}}{e^{\lambda_m} - 1} \rightarrow \langle c_k^\dagger c_{k'} \rangle = \sum_m \frac{\phi_{mk} \phi_{k'm}^*}{e^{\lambda_m} - 1}. \quad (3.2.63)$$

Dieser allgemeine Ausdruck mit einem zu wählenden Parameter λ , in den die Temperatur und die Zeitabhängigkeit des Feldes eingeht, kann zur Grundlage genommen werden, eine propagierende Intensität zu berechnen.

Gaußförmige Propagation der Intensität

Mit den gegebenen Erwartungswerten läßt sich nun ein thermischer Lichtpuls berechnen. Da es sich aber um einen thermischen Lichtpuls handelt, also die Intensität gemessen werden soll, muß der Erwartungswert des Amplitudenquadrats mit Hilfe von Gleichung 3.2.49 errechnet und der Erwartungswert aus Gleichung 3.2.63 in Abhängigkeit des einfallenden Lichtfeldes ausgedrückt werden. In Appendix A.11 ist die Rechnung im Detail nachzulesen. So gewählt ist die inkohärente Photondichte nichts anderes als die Überlagerung zweier kohärenter Lichtpulse, die zu verschiedenen Zeiten ausgestrahlt werden, sich überlagern und so eine propagierende Photondichte erzeugen.

$$\langle c^\dagger(k)c(k') \rangle = f(k) f(k') \quad (3.2.64)$$

mit der Abkürzung

$$f(k) = \sqrt{\frac{\sqrt{2\pi}N}{\tau}} \sqrt{\frac{2\epsilon_0 \mathcal{A}}{\hbar c k}} \frac{\tau c}{4} \left\{ e^{-\frac{1}{2}\tau^2 c^2 (k-\bar{k})^2} + e^{-\frac{1}{2}\tau^2 c^2 (k+\bar{k})^2} \right\}. \quad (3.2.65)$$

Als Einheit ergibt sich (zur Überprüfung) unter Berücksichtigung der Quantisierungsvolumina der Lichtoperatoren für den Erwartungswert der Lichtoperatoren: Frequenz durch Intensität.

4 Das Jaynes-Cummings-Modell (JCM)

4.1 Hamilton-Operator des JCM

Um für den späteren Vergleich zwischen kohärenter und inkohärenter Anregung einen Referenzpunkt zu haben und die sich ergebenden Gleichungen aus der Korrelationsentwicklung auf ihre Gültigkeit zu überprüfen, wird in diesem Abschnitt das JCM hergeleitet, das eine exakte Lösung für ein Zwei-Niveau-System in Wechselwirkung mit einem 1-modigen Lichtfeld erlaubt [LP07]. Der Hamilton-Operator für ein Zwei-Niveau-System, das mit einem 1-modigen elektromagnetischen Feld wechselwirkt schreibt sich ganz allgemein mit $M_k^{cv} = -M_k^{vc*}$:

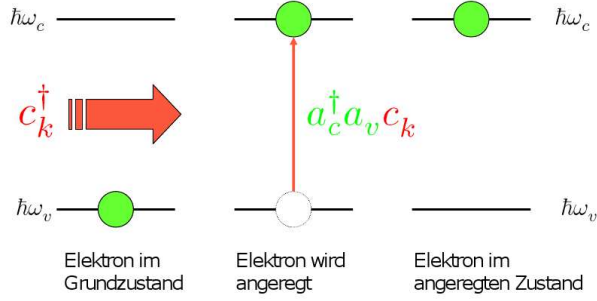


Abbildung 4.1: Das Jaynes-Cummings-Modell

$$\hat{H} = \hbar\omega_v a_v^\dagger a_v + \hbar\omega_c a_c^\dagger a_c + \hbar\omega_k c_k^\dagger c_k + (M_k^{vc} a_v^\dagger a_c - M_k^{vc*} a_c^\dagger a_v)(c_k - c_k^\dagger).$$

Vernachlässigt man die nicht energie-erhaltenden Größen unter der RWA⁶ und nimmt man ein reelles Dipolmoment an: $M_k^{vc} = M_k^{vc*}$, folgt hieraus:

$$\hat{H} = \hbar\omega_v a_v^\dagger a_v + \hbar\omega_c a_c^\dagger a_c + \hbar\omega_k c_k^\dagger c_k - M_k^{vc} \left(a_v^\dagger a_c c_k^\dagger + a_c^\dagger a_v c_k \right).$$

Um den Inversionsoperator einzuführen, nutzt man die in einem abgeschlossenen 1-Elektron-System geltende Teilchenzahl-Erhaltung $a_v^\dagger a_v + a_c^\dagger a_c = \text{Id}$ aus. Man setzt den Energie-Nullpunkt so, daß $\frac{1}{2}(\hbar\omega_c + \hbar\omega_v) = 0$ gilt, und setzt:

$$\hbar(\omega_v a_v^\dagger a_v + \omega_c a_c^\dagger a_c) = \hbar\omega_v a_v^\dagger a_v + \hbar\omega_c a_c^\dagger a_c - \frac{1}{2}(\hbar\omega_c + \hbar\omega_v) \quad (4.1.1)$$

$$= \frac{\hbar}{2}\omega_v a_v^\dagger a_v - \frac{\hbar}{2}\omega_v(\text{Id} - a_v^\dagger a_v) + \frac{\hbar}{2}\omega_c a_c^\dagger a_c - \frac{\hbar}{2}\omega_c(\text{Id} - a_c^\dagger a_c) \quad (4.1.2)$$

$$= \frac{\hbar}{2}\omega_v a_v^\dagger a_v - \frac{\hbar}{2}\omega_v a_c^\dagger a_c + \frac{\hbar}{2}\omega_c a_c^\dagger a_c - \frac{\hbar}{2}\omega_c a_v^\dagger a_v \quad (4.1.3)$$

$$= \frac{\hbar}{2}(\omega_c - \omega_v)(a_c^\dagger a_c - a_v^\dagger a_v) \quad (4.1.4)$$

$$= \frac{\hbar}{2}\Delta(a_c^\dagger a_c - a_v^\dagger a_v). \quad (4.1.5)$$

mit $\Delta := \omega_c - \omega_v$. Der Hamilton-Operator des Jaynes-Cummings-Modell lautet demnach vollständig:

$$\hat{H} = \frac{\hbar}{2}\Delta(a_c^\dagger a_c - a_v^\dagger a_v) + \hbar\omega_k c_k^\dagger c_k - M_k^{vc} \left(a_v^\dagger a_c c_k^\dagger + a_c^\dagger a_v c_k \right).$$

⁶Für eine analytische Lösung ist es nicht unbedingt notwendig, eine RWA durchzuführen, vgl. [ZZ89].

Eine Konstante der Bewegung ist in einem abgeschlossenen 1-Elektron-System die Teilchenzahlerhaltung $\text{Id} = a_v^\dagger a_v + a_c^\dagger a_c$. Eine andere ist der Anregungszahloperator $A = a_c^\dagger a_c + c_k^\dagger c_k$, d.h. in einem abgeschlossenen System ist die Zahl der Photonen und der angeregten Elektronen konstant. Zur weiteren Rechnung wird der Hamilton-Operator in diesen Erhaltungsgrößen ausgedrückt:

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{\hbar}{2} \Delta (a_c^\dagger a_c + a_v^\dagger a_v) - \hbar \Delta a_v^\dagger a_v + \hbar \omega_k (c_k^\dagger c_k + a_c^\dagger a_c) - \\ &\quad - \hbar \omega_k a_c^\dagger a_c - M_k^{vc} (a_v^\dagger a_c c_k^\dagger + a_c^\dagger a_v c_k) \\ &= \frac{\hbar}{2} \Delta \text{Id} - \hbar \Delta a_v^\dagger a_v + \hbar \omega_k A - \hbar \omega_k \text{Id} + \hbar \omega_k a_v^\dagger a_v - M_k^{vc} (a_v^\dagger a_c c_k^\dagger + a_c^\dagger a_v c_k) \\ &= \underbrace{\left(\frac{\hbar}{2} \Delta - \hbar \omega_k \right) \text{Id} + \hbar \omega_k A}_{H_I} - \underbrace{\left(\hbar \Delta - \hbar \omega_k \right) a_v^\dagger a_v - M_k^{vc} (a_v^\dagger a_c c_k^\dagger + a_c^\dagger a_v c_k)}_{H_{II}}. \end{aligned}$$

Die Dynamik wird allein von H_{II} getragen, da dieser Teil des Hamilton-Operators nicht mit dem vollständigen Hamilton-Operator tauscht, also keine Konstante der Bewegung ist. H_I tauscht dagegen mit ihm und ist folglich eine Konstante der Bewegung. Aufgrund dieser Struktur liegt ein Separationsansatz nahe und die Wellenfunktion des Systems wird in

$$|\Psi\rangle := |\Psi_I\rangle \cdot |\Psi_{II}\rangle \quad (4.1.6)$$

aufgespalten, wobei nach der stationären Schrödingergleichung

$$H_I |\Psi\rangle_I = E_I |\Psi\rangle_I \quad (4.1.7)$$

$$H_{II} |\Psi\rangle_{II} = E_{II} |\Psi\rangle_{II} \quad (4.1.8)$$

gilt. Da H_I mit dem Gesamt-Hamilton-Operator tauscht enthält die zeitabhängige Lösung durch die Schrödinger-Gleichung nur eine Phasenfaktor $e^{i\omega_I t}$, der in der Bildung des Erwartungswertes (Betragsquadrat) wegfällt. Für die Gesamtdynamik des Systems spielt demnach nur H_{II} eine Rolle. Im folgenden wird nun die Lösung für den Fall einer resonanten Anregung, also für $\Delta = \omega_k$ ermittelt.

4.2 Analytische Lösung des JCM

Der Anfangszustand $\Psi(t=0)$ sei beispielsweise (o.B.d.A.) durch ein angeregtes Elektron festgelegt und durch n Photonen in der betrachteten Mode. Dieser Zustand wird aus dem Vakuumzustand $|0\rangle$ durch die Anwendung der entsprechenden Operatoren erzeugt:

$$\Psi(t=0) = |i\rangle = a_c^\dagger \left(c_k^\dagger \right)^n |0\rangle = |c\ n\rangle.$$

Der Endzustand, der der Teilchenzahl-Erhaltung des Systems entspricht, ist ein Elektron im Grundzustand und $n+1$ Photonen in der betrachteten Mode:

$$|f\rangle = a_v^\dagger \left(c_k^\dagger \right)^{n+1} |0\rangle = |v\ n+1\rangle.$$

Die allgemeine Lösung der Wellenfunktion ist eine Überlagerung dieser beiden Zustände:

$$|\Psi(t)\rangle = C_i(t) |i\rangle + C_f(t) |f\rangle. \quad (4.2.9)$$

Im Wechselwirkungsbild spielt nur der H_{II} -Operator eine Rolle. Die Schrödinger - Gleichung lautet:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = H_{II} |\Psi(t)\rangle. \quad (4.2.10)$$

Die Wirkung von H_{II} auf den Zustand lässt sich über das Verhalten der Erzeuger- und Vernichter-Operatoren bezüglich der Vertauschungsrelationen und durch die Ein-Elektron-Annahme herleiten. Beispielsweise:

$$\begin{aligned}
 H_{II} C_i(t) |i\rangle &= C_i(t) M_k^{vc} \left(a_v^\dagger a_c c_k^\dagger + a_c^\dagger a_v c_k \right) |i\rangle \\
 &= C_i(t) M_k^{vc} \left(a_v^\dagger a_c c_k^\dagger a_c^\dagger |n\rangle + a_c^\dagger a_v c_k a_c^\dagger |n\rangle \right) \\
 &= C_i(t) M_k^{vc} \left(\sqrt{n+1} a_v^\dagger |n+1\rangle - \underbrace{a_v^\dagger a_c^\dagger a_c}_{=0} |n+1\rangle + \underbrace{a_c^\dagger a_c^\dagger a_v}_{=0} |n-1\rangle \right) \\
 &= C_i(t) M_k^{vc} \sqrt{n+1} |v\ n+1\rangle = C_i(t) M_k^{vc} \sqrt{n+1} |f\rangle.
 \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich als Bewegungsgleichung nach Koeffizientenvergleich mit $\tilde{M} = \hbar^{-1}M$:

$$\frac{d}{dt} C_i(t) = -i\tilde{M}_k^{vc} \sqrt{n+1} C_f(t) \quad (4.2.11)$$

$$\frac{d}{dt} C_f(t) = -i\tilde{M}_k^{vc} \sqrt{n+1} C_i(t). \quad (4.2.12)$$

Mit den gegebenen Anfangsbedingungen $C_i(0) = 1$ und $C_f(0) = 0$ haben diese Gleichungen die Lösung:

$$C_i(t) = \cos\left(\tilde{M}_k^{vc} \sqrt{n+1} t\right) \quad (4.2.13)$$

$$C_f(t) = -i \sin\left(\tilde{M}_k^{vc} \sqrt{n+1} t\right). \quad (4.2.14)$$

Die quantenmechanische Rabi-Frequenz ist also von der Photonenzahl abhängig.

$$\Omega_n = 2 \tilde{M}_k^{vc} \sqrt{n+1}. \quad (4.2.15)$$

Je höher die Photonenzahl, desto stärker ist die Oszillation. Selbst bei einer Photonenzahl von Null gibt es eine sogenannte Vakuum-Rabi-Oszillation, die auch experimentell beobachtet wird [NRS⁺94] und in Abbildung 4.2 zu sehen ist. Für die Besetzungswahrscheinlichkeiten ist das jeweilige Betragsquadrat zu ermitteln. Sie lauten:

$$\langle a_v^\dagger a_v \rangle = |C_f(t)|^2 = \sin^2\left(\frac{\Omega_n}{2} t\right) \quad (4.2.16)$$

$$\langle a_c^\dagger a_c \rangle = |C_i(t)|^2 = \cos^2\left(\frac{\Omega_n}{2} t\right). \quad (4.2.17)$$

Für $n=0$ geplottet ergibt sich in der Abbildung 4.2 die nur quantenmechanisch erklärbare Rabi-Oszillation, hier aufgetragen über die Pulsfläche, die sich aus Photonenzahl und Licht-Materie-Wechselwirkung ergibt.

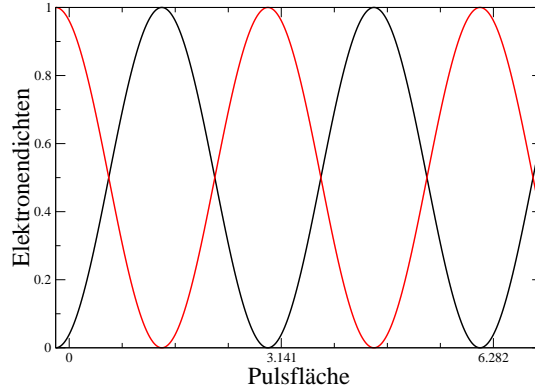


Abbildung 4.2: JCM: Vakuüm-Rabi-Oszillation der Elektronendichten des Leitungsbandes (rot) und Valenzbandes (schwarz), Photonenzahl am Anfang: $n=0$.

4.3 Überlagerung von Besetzungszuständen im JCM

Um verschiedene Photon-Statistiken (vgl. 3.1.1 - 3.1.4) im Jaynes-Cummings-Modell zu berücksichtigen, muß das elektromagnetische Feld als Linearkombination von Besetzungszuständen eingeführt werden:

$$|\Psi(0)\rangle_{Photon} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n |n\rangle. \quad (4.3.18)$$

Für das Zwei-Niveau-System gilt ganz allgemein:

$$|\Psi(0)\rangle_{Elektron} = C_v |v\rangle + C_c |c\rangle, \quad (4.3.19)$$

also eine Linearkombination aus den Wahrscheinlichkeiten und Zuständen, das Elektron im angeregten oder im Grundzustand zu finden. Der Zustand des Gesamtsystems ist nun das Tensorprodukt aus den Wellenfunktionen für das Zwei-Niveau-System und für das elektromagnetische Feld

$$|\Psi(0)\rangle = |\Psi(0)\rangle_{Elektron} \otimes |\Psi(0)\rangle_{Photon}. \quad (4.3.20)$$

Die Dynamik des Systems folgt wiederum aus der Schrödinger-Gleichung. Aus der bekannten Lösung für den Fockzustand läßt sich die Lösung für die Gesamt-Wellenfunktion ermitteln⁷:

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n [C_v(t) |gn+1\rangle + C_c(t) |en\rangle] \quad (4.3.21)$$

mit den von den gesetzten Anfangsbedingungen $C_v = C_v(0)$ und $C_c = C_c(0)$ abhängigen Koeffizienten

$$C_v(t) = C_v \cos\left(\frac{\Omega_n}{2}t\right) - iC_c \sin\left(\frac{\Omega_n}{2}t\right) \quad (4.3.22)$$

$$C_c(t) = C_c \cos\left(\frac{\Omega_n}{2}t\right) - iC_v \sin\left(\frac{\Omega_n}{2}t\right). \quad (4.3.23)$$

⁷ Dies gilt nur, wenn sich die Koeffizienten C_n zeitlich nicht ändern, die Photonstatistik des Feldes also erhalten bleibt.

Hiermit lassen sich die verschiedenen Erwartungswerte des Systems errechnen. Zum Beispiel die Besetzungsdichte im Leitungsband (bei einer Anfangsbedingung von $C_v = 1$ und $C_c = 0$):

$$\langle a_c^\dagger a_c \rangle = \langle \Psi(t) | a_c^\dagger a_c | \Psi(t) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |C_n|^2 \sin^2 \left(\frac{\Omega_n}{2} t \right).$$

Die Photon-Statistik wählt die Verteilungsfunktion der Fockzustandsüberlagerung C_n aus und somit kann die Dynamik für verschiedene Photon-Statistiken verglichen werden.

Die Verteilungsfunktion für einen kohärenten Zustand (vgl. Gleichung 3.1.2) lautet:

$$C_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}.$$

Der Parameter α gibt die Gewichtung an. Es kann eine mittlere Photonenzahl oder zum Beispiel

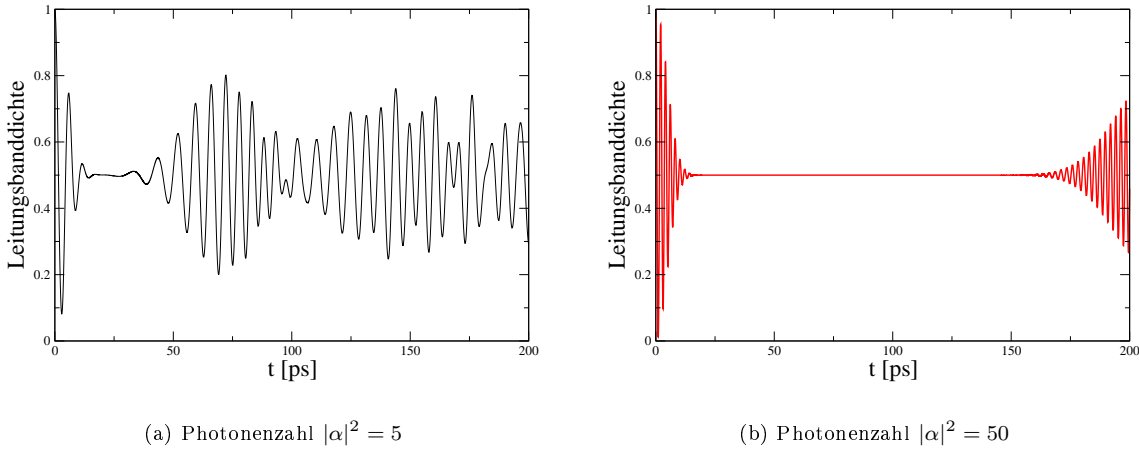


Abbildung 4.3: JCM: Leitungsbanddynamik eines Zwei-Niveau-Systems in einem kohärenten Lichtfeld

ein Gaußpuls eingesetzt werden.

Mit einem gewählten Wert für α kann man nun die Gleichung aus 4.3.24 für verschiedene Zeitpunkte berechnen. Als Ergebnis erhält man die Leitungsbanddynamik eines Zwei-Niveau-Systems in einem quantisierten Lichtfeld, in diesem Falle, in einem kohärenten Feld mit einer gegebenen Poisson-Verteilung. Die Summe in 4.3.24 kann vorzeitig abgebrochen. Zur Sicherheit sind Beiträge für n bis $n_{max} = |\alpha|^2 \cdot 10$ mitgenommen worden. Wegen der scharfen Verteilungsfunktion gibt es für höhere n nur noch vernachlässigbar geringe Beiträge, die nichts am geplotteten Ergebnis verändern. In Abbildung 4.3 sieht man die Leitungsbanddichte über die Zeit geplottet. Die Rabi-Oszillation hat gründlich ihre Gestalt verändert und es treten sogenannte Collapse und Revivals auf, also nach einer Auslöschung (collapse) wieder auftretende Oszillationen (revivals), die aus der Interferenz zwischen den verschiedenen quantenoptischen Rabi-Frequenzen (Gleichung 4.2.15) hervorgehen. Die Überlagerungen wirken konstruktiv oder destruktiv und erzeugen die sichtbare Schwebung. Zum Vergleich ist die Leitungsbanddichte noch für eine andere mittlere Besetzungszahl geplottet. Die Revival-Zeit verlängert sich bei höherer Photonenzahl deutlich. Über die Energie-Zeit-Unschärfe läßt sich für die Revivalzeit T_R eine wurzelförmige Abhängigkeit von der Photonenzahl abschätzen [VWW01]:

$$T_R = \frac{2\pi}{|\bar{M}_k^{vc}|^2} |\alpha|. \quad (4.3.24)$$

Für die thermische Anregung gilt eine andere Statistik (vgl. 3.1.38), die Bose-Einstein-Statistik. Sie wird ausgedrückt mit $n = \langle c^\dagger c \rangle$ und als mittlere Besetzungszahl (abhängig von der Temperatur) \bar{n} als eine Besetzungswahrscheinlichkeit von

$$|C_n|^2 = \frac{\bar{n}^n}{(\bar{n} + 1)^{n+1}}. \quad (4.3.25)$$

Die Superposition ergibt schon durch diesen Ausdruck ein unterschiedliches Ergebnis. Plottet man mit dieser Verteilung die Leitungsbanddynamik so ergibt sich ein völlig anderes Verhalten. In Abbil-

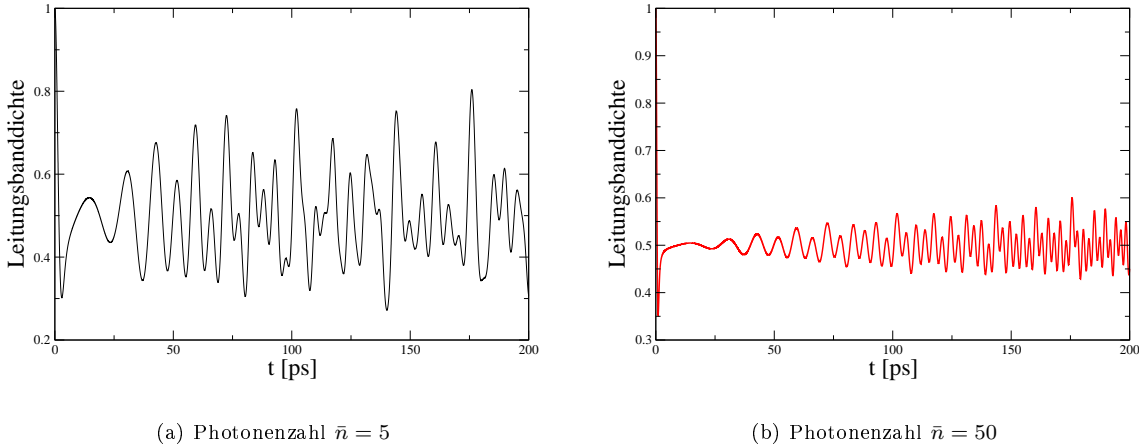


Abbildung 4.4: JCM: Leitungsbanddynamik eines Zwei-Niveau-Systems in einem thermischen Lichtfeld

dung 4.4 ist die Leitungsbanddynamik eines Zwei-Niveau-Systems in einem thermischen Lichtfeld dargestellt. Selbst im Falle gleicher Energie, also gleicher mittlerer Photonenzahl, oszilliert das System thermisch angeregt ganz anders als kohärent angeregt. Die Oszillation ist chaotischer und zeigt keine eindeutige Tendenz. Revivals und Collapse-Phänomene deuten sich an, sind aber lange nicht so ausgeprägt wie in Abbildung 4.3. Dies zeigt schon, daß quantenoptische Effekte bei der Anregung eine große Rolle spielen können.

Das Jaynes-Cummings-Modell hat jedoch den Nachteil, auf ein isoliertes Zwei-Niveau-System und eine nicht-stationäre Anregung beschränkt zu sein⁸. Die analytische Lösung gilt außerdem nur in einem abgeschlossenen System, also ohne dissipative Prozesse. Im folgenden sollen nun Schritte unternommen werden, dieses Modell zu erweitern und die quantenoptischen Anregung auf ein gekoppeltes System von Quantenpunkten zu untersuchen.

⁸Es gibt einige Versuche, eine analytische Lösung auch für ein anfänglich im Grundzustand befindliches Zwei-Niveau-System zu finden, das mit einem quantisierten Lichtfeld wechselwirkt, vgl. [CKSM93].

5 Isolierter Quantenpunkt

Grundlegende Effekte der quantisierten Anregung von Quantenpunkten lassen sich schon bei isolierten Quantenpunkten erkennen. Als Vorbereitung auf das gekoppelte System, das in Kapitel 6 behandelt wird, werden nun die verschiedenen Anregungsformen bei einem isolierten Quantenpunkt berechnet. Dieser wechselwirkt mit keinem anderen elektronischen System und kann in der hier angewendeten Effektiven-Massen-Näherung als Zwei-Niveau-System betrachtet werden (vg. Abschnitt 2.3.1). Polarisation des Lichtes und der Spin des Elektrons bleiben unberücksichtigt, da hier lediglich die ersten und grundlegenden Mechanismen der quantisierten Anregung untersucht werden sollen.

Es gibt zwei Möglichkeiten, ein System anzuregen. Zur Verfügung stehen stationäre und nicht-stationäre Anregungsformen, die in diesem Abschnitt jeweils getrennt voneinander untersucht werden. Zuerst wird der isolierte Quantenpunkt im stationären Limit angeregt, so daß für die Erwartungswerte $\partial_t \langle A \rangle = 0$ gilt. Die verschiedenen Lichtstatistiken gehen hier über die Korrelationsfunktion der Intensität ein 3.1.1, die in den Bewegungsgleichungen der 4. Ordnung im Lichtkopplungs-Element eingeht, und werden miteinander verglichen.

Bevor die nicht-stationäre Anregung untersucht wird, werden die entsprechenden Bewegungsgleichungen in Korrelationsentwicklung hergeleitet und mittels des Jaynes-Cummings-Modell auf ihre Gültigkeit hin überprüft. Es zeigt sich, daß die Korrelationsentwicklung für Pulsflächen viel kleiner als 1 eine gute Näherung darstellt. Daraufhin wird die nicht-stationäre Anregung numerisch wie analytisch berechnet und die Ergebnisse werden vorgestellt und miteinander verglichen. In einem letzten Schritt wird noch ein System ungekoppelter Quantenpunkte als Möglichkeit vorgestellt, Lichtfelder mit kontrollierter Lichtstatistik zu erzeugen. Diese in einem Resonator sitzenden Quantenpunkte dienen als Beispiel für eine Lichtquelle, mit der die hier vorgestellten Berechnungen, experimentell überprüft werden könnten.

5.1 Stationäre Anregung

Die stationäre Anregung des Quantenpunktes hat den großen Vorteil, daß das System einen Gleichgewichtszustand erreichen kann, in welchem die konstante Anregung und die Verluste, erzwungen durch Dämpfungsprozesse, sich die Waage halten und die Zeitableitung der Erwartungswerte verschwindet. In diesem sogenannten stationären Limit können die Gleichungen leicht gelöst werden. Die angenommenen Verluste begründen sich über dissipative Lichtmoden, also Moden, die nicht mehr mit dem System rückwirken 2.6. Die Photonen, die im Prozeß der spontanen Emission dem System verloren gehen, können also nicht mehr absorbiert werden. Dieses Gleichgewicht stellt sich nach einem von der gewählten Dämpfungsstärke, Lichtkopplung und Anregungsstärke abhängigen Zeitpunkt ein. Das System schwingt sich zuerst ein und bleibt dann stabil.

Die Photonstatistik geht hier nicht in die Photondichte ein, sondern zeigt sich als ein Effekt höherer Ordnung (4.Ordnung der Lichtkopplung, im Intensitätsquadrat). Ist die Teilchenzahl, also die mittlere Photonenzahl in der Mode gleich, so ergibt sich trotz verschiedener Lichtstatistik, daß sich der Erwartungswert der Intensitäten nicht unterscheidet 3.2. Erst die Korrelationsfunktion der Intensitäten im Hanbury-Twiss-Brown-Experiment liefert eine Charakteristik, anhand derer die Lichtfelder voneinander unterscheidbar sind. Insofern muß bei einer stationären Anregung in jedem Fall das zu lösende Differentialgleichungssystem bis zur 4.Ordnung der Licht-Kopplung aufgestellt werden. In der 2.Ordnung sind die Dynamiken unter der Voraussetzung, daß das Lichtfeld dem System dieselbe Menge an Energie zuführt, identisch.

5.1.1 Bewegungsgleichungen

Die Licht-Materie-Wechselwirkung führt zwangsweise auf das Hierarchieproblem: Das Differentialgleichungssystem der Operatoren muß mittels einer angemessenen Approximation abgebrochen werden. Im Falle der stationären Anregung werden die Elektronendichten nur von Photondichten getrieben. Es liegt nahe, in der höchsten Ordnung die Bornsche Näherung durchzuführen 2.5.3. In der 4. Ordnung im Lichtkopplungs-Element wird demnach folgende Approximation durchgeführt:

$$\langle a_v^\dagger a_v c_k^\dagger c_k^\dagger c_k c_k \rangle = \langle a_v^\dagger a_v \rangle \langle c_k^\dagger c_k^\dagger c_k c_k \rangle. \quad (5.1.1)$$

Diese Näherung ist insofern nur gültig, wenn im Vergleich zur Zahl der Elektronen die Photonenzahl hoch genug ist. Im folgenden wurde darauf geachtet, daß das Verhältnis der Elektron- zur Photonenzahl 0.01 nicht überschreitet. Die Rückwirkung des elektronischen Systems auf das photonische muß marginal sein. Die Photonenzahl der Anregung darf jedoch nicht zu hoch werden. Je höher die Zahl der Photonen ist, desto wichtiger werden höhere Ordnungen. Die Ergebnisse sind nur gültig, wenn einerseits die Bornsche Näherung anwendbar, andererseits die 4. Ordnung im Lichtkopplungselement jedoch ausreichend ist. Die Pulsfläche muß in jedem Fall viel kleiner als 1 bleiben. Zur Parameterkontrolle wurde bei jedem der im folgenden gezeigten Ergebnisse darauf geachtet, daß es sich tatsächlich um ein stationäres Limit handelt, die Resultate also ab einem bestimmten Zeitpunkt keine Veränderung mehr erfahren.

Die Bewegungsgleichungen in der RWA 2.5.1, bis zur 4. Ordnung im Lichtkopplungselement, sowie in der Bornschen Näherung 2.5.3 lauten mit der Photondichte $\langle c_k^\dagger c_k \rangle = n$ für die Elektronendichte im Leitungsband mit angenommenem radiativen Zerfall 2.6 und einer festen Mode k , $\bar{M}_k^{vc} = \bar{M}$ 2.3.45:

$$\partial_t \langle a_c^\dagger a_c \rangle = -2\Gamma \langle a_c^\dagger a_c \rangle + 2 \operatorname{Im} [\bar{M} \langle a_v^\dagger a_c c^\dagger \rangle]. \quad (5.1.2)$$

Die Photon-assistierte Polarisation mit der Bandlückenfrequenz $\omega_1 = \omega_c - \omega_v$ und der Lichtfrequenz ω treibt die Leitungsbanddichte:

$$\partial_t \langle a_v^\dagger a_c c^\dagger \rangle = i(\omega - \omega_1 + i\Gamma) \langle a_v^\dagger a_c c^\dagger \rangle - 2i\bar{M}^* \left[\frac{1}{2} \langle a_c^\dagger a_c \rangle + \langle a_c^\dagger a_c c^\dagger c \rangle - n \right]. \quad (5.1.3)$$

In der Inhomogenität sind sowohl die spontane Emission enthalten (der Term, der nur von der Besetzungsdichte im Leitungsband abhängt) sowie die von der Photondichte-assistierte Inversion, die Differenz zwischen Leitungs- und Valenzband: $\langle a_c^\dagger a_c c^\dagger c \rangle - \langle a_v^\dagger a_v c^\dagger c \rangle = 2\langle a_c^\dagger a_c c^\dagger c \rangle - n$, das Kernstück der Rabi-Oszillation. Im Limit der hier verwendeten Näherung kann es zu keiner Rabi-Oszillation kommen. Die Bewegungsgleichungen verlieren ihre Gültigkeit, sobald die Inversion positiv wird, d.h., die Leitungsbanddichte also größer als die Valenzbanddichte ist.

Die Photondichte-assistierte Leitungsbanddichte wird von einer Polarisation mit drei Lichtoperatoren getrieben. Sie wird wie die Leitungsbanddichte gedämpft, da die radiative Dämpfung hier als Abstrahlung in eine dissipative Mode interpretiert wird, die nicht mit dem treibenden Lichtfeld wechselwirkt, beispielsweise eine andere räumliche Ausbreitungsrichtung besitzt 2.6:

$$\partial_t \langle a_c^\dagger a_c c^\dagger c \rangle = -2\Gamma \langle a_c^\dagger a_c c^\dagger c \rangle + 2 \operatorname{Im} [\bar{M} \langle a_v^\dagger a_c c^\dagger c^\dagger c \rangle]. \quad (5.1.4)$$

In der letzten, für die stationäre Anregung zu lösende Gleichung, tritt nun der 4er-Photon-Erwartungswert, der die Inversion treibt, auf:

$$\begin{aligned} \partial_t \langle a_v^\dagger a_c c^\dagger c^\dagger c \rangle &= -i(\omega_1 - \omega - i\Gamma) \langle a_v^\dagger a_c c^\dagger c^\dagger c \rangle \\ &\quad - i \bar{M}^* \left[2\langle a_c^\dagger a_c c^\dagger c \rangle + 2n^2 g^{(2)} \langle a_c^\dagger a_c \rangle - n^2 g^{(2)} \right]. \end{aligned} \quad (5.1.5)$$

In Gleichung 5.1.5 ist der 4er-Photon-Erwartungswert schon durch die Korrelationsfunktion der Intensität aus der Definition in 3.1.1 ausgedrückt worden, mit welcher die Photonstatistik in das

Gleichungssystem eingehet und der Einfluß der Photonstatistik auf die Systemdynamik untersucht werden kann:

$$\langle c^\dagger c^\dagger c c \rangle = \langle c^\dagger c \rangle^2 g^{(2)}. \quad (5.1.6)$$

5.1.2 Analytische Lösung

Im Falle eines isolierten Quantenpunktes lässt sich das Gleichungssystem analytisch lösen. Hierfür wird die Markovnäherung (siehe Abschnitt 2.5.4) verwendet, um die Polarisationen nach formaler Integration in einen auswertbaren Ausdruck zu bringen:

$$\langle a_v^\dagger a_c c^\dagger c^\dagger c \rangle(t) = -i \bar{M}^* \left[2 \langle a_c^\dagger a_c c^\dagger c \rangle + 2n^2 g^{(2)} \langle a_c^\dagger a_c \rangle - n^2 g^{(2)} \right] \int_0^\infty ds e^{-i(\omega_1 - \omega - i\Gamma)s}. \quad (5.1.7)$$

Das Integral konvergiert wegen der Dämpfung:

$$\int_0^\infty ds e^{-i(\omega_1 - \omega - i\Gamma)s} = \frac{e^{-i(\omega_1 - \omega - i\Gamma)s}}{(\omega_1 - \omega) - i\Gamma} \Big|_0^\infty = \frac{1}{-i} \left[-\frac{\omega_1 - \omega}{(\omega_1 - \omega)^2 + \Gamma^2} - i \frac{\Gamma}{(\omega_1 - \omega)^2 + \Gamma^2} \right],$$

und für die Polarisationen ergibt sich demnach:

$$\langle a_v^\dagger a_c c^\dagger c^\dagger c \rangle(t) = \bar{M}^* \left[2 \langle a_c^\dagger a_c c^\dagger c \rangle + 2n^2 g^{(2)} \langle a_c^\dagger a_c \rangle - n^2 g^{(2)} \right] \left[-\frac{\omega_1 - \omega}{(\omega_1 - \omega)^2 + \Gamma^2} - i \frac{\Gamma}{(\omega_1 - \omega)^2 + \Gamma^2} \right] \quad (5.1.8)$$

$$\langle a_v^\dagger a_c c^\dagger \rangle(t) = \bar{M}^* \left\{ \langle a_c^\dagger a_c \rangle + 2 \langle a_c^\dagger a_c c^\dagger c \rangle - 2n \right\} \left[-\frac{\omega_1 - \omega}{(\omega_1 - \omega)^2 + \Gamma^2} - i \frac{\Gamma}{(\omega_1 - \omega)^2 + \Gamma^2} \right]. \quad (5.1.9)$$

Zur Berechnung der Dichten wird nur der Imaginärteil der Polarisationen benötigt. Es wird angenommen, daß die Lichtkopplung reell ist. Mit der Abkürzung: $\Lambda = \frac{(\omega_1 - \omega)^2 + \Gamma^2}{2M^2}$, in der das Verhältnis von der Lichtkopplung zur Dämpfung sowie der Resonanzterm eingehet, also durch Materialparameter und gewählte Lichtfrequenz festgelegt wird, ergibt sich für die Dichten:

$$\partial_t \langle a_c^\dagger a_c c^\dagger c \rangle = \frac{-2\Gamma}{\Lambda} \left[(1 + \Lambda) \langle a_c^\dagger a_c c^\dagger c \rangle + n^2 g^{(2)} \langle a_c^\dagger a_c \rangle - \frac{1}{2} n^2 g^{(2)} \right] \quad (5.1.10)$$

$$\partial_t \langle a_c^\dagger a_c \rangle = \frac{-2\Gamma}{\Lambda} \left[\left(\frac{1}{2} + \Lambda \right) \langle a_c^\dagger a_c \rangle + \langle a_c^\dagger a_c c^\dagger c \rangle - n \right]. \quad (5.1.11)$$

Die beiden Dichten sind miteinander gekoppelt und können ineinander eingesetzt werden. Zur Vereinfachung der Rechnung und zur Erhöhung der Übersichtlichkeit wird das Gleichungssystem in Matrixform geschrieben. Man erhält:

$$-\frac{\Lambda}{2\Gamma} \begin{pmatrix} \partial_t \langle a_c^\dagger a_c \rangle \\ \partial_t \langle a_c^\dagger a_c c^\dagger c \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \Lambda & 1 \\ n^2 g^{(2)} & 1 + \Lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle a_c^\dagger a_c \rangle \\ \langle a_c^\dagger a_c c^\dagger c \rangle \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} n \\ \frac{1}{2} n^2 g^{(2)} \end{pmatrix}. \quad (5.1.12)$$

Im stationären Grenzfall verschwinden die Zeitableitungen. Polarisierungen wie Dichten verändern sich nicht. Der Gleichgewichtszustand kann errechnet werden, indem die Koeffizientenmatrix diagonalisiert wird:

$$0 = \beta \begin{pmatrix} n^2 g^{(2)} & 0 \\ 0 & -(1 + \Lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle a_c^\dagger a_c \rangle \\ \langle a_c^\dagger a_c c^\dagger c \rangle \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n(1 + \Lambda) - \frac{1}{2}n^2 g^{(2)} \\ -\frac{(1+\Lambda)(\frac{1}{2}+\Lambda)}{2} + n(1 + \Lambda) \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } \beta = \left\{ 1 - \frac{(1+\Lambda)(\frac{1}{2}+\Lambda)}{n^2 g^{(2)}} \right\}.$$

Das analytische Ergebnis der Dichten läßt sich nun vollständig in kontrollierbaren Parametern (eingestrahlte Lichtfrequenz, eingestrahlte Intensität (Photonen pro Zeiteinheit sowie das $g^{(2)}$ des Lichtfeldes) sowie vom Material abhängigen Größen (Dämpfung und Lichtkopplung des Quantenpunktes) darstellen:

$$\langle a_c^\dagger a_c c^\dagger c \rangle = \frac{1}{2} \frac{2n^3 g^{(2)} - n^2 g^{(2)}}{n^2 g^{(2)} - (1 + \Lambda)(\frac{1}{2} + \Lambda)} \quad (5.1.13)$$

$$\langle a_c^\dagger a_c \rangle = \frac{1}{2} \frac{n^2 g^{(2)} - n(1 + \Lambda)}{n^2 g^{(2)} - (1 + \Lambda)(\frac{1}{2} + \Lambda)} \quad (5.1.14)$$

$$= \frac{1}{2} \left[1 - \frac{n(1 + \Lambda) - (1 + \Lambda)(\frac{1}{2} + \Lambda)}{n^2 g^{(2)} - (1 + \Lambda)(\frac{1}{2} + \Lambda)} \right]. \quad (5.1.15)$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen läßt sich der Einfluß der Photonstatistik auf die Antwort des Systems vergleichen. Je nach eingestellten $g^{(2)}$, das einen beliebigen positiven Wert einnehmen kann, erhält man verschiedene Werte für die Dichten. Zur Überprüfung des Ergebnisses können zwei Grenzfälle betrachtet werden: das System erhält kein Photon oder eine sehr große Anzahl von Photonen. Enthält es kein Photon, so verschwindet der Zähler in Gleichung 5.1.13 und 5.1.14. Der Nenner bleibt endlich aufgrund der Dämpfungen. Die Wahrscheinlichkeit, ein Elektron im Leitungsband zu finden, wird null. Ohne Photon bleibt das elektronische System im Grundzustand. Sind dagegen sehr viele Photonen im System, dominieren die höchsten Potenzen der Photondichte in Zähler und Nenner. Die Photondichte-assistierte Leitungsbanddichte steigt in diesem Limit linear mit der Photondichte an. Dies ist physikalisch, da die bedingte Wahrscheinlichkeit von Leitungsbanddichte und Photondichte bei sehr hohen Photonenzahlen faktorisiert und der Wert der Photondichte dominant wird. In Gleichung 5.1.14 dagegen heben sich Zähler und Nenner auf und der Grenzwert ist 0.5. Bei sehr hohen Photonenzahlen befindet sich das Elektron mit gleicher Wahrscheinlichkeit im Leitungs- wie im Valenzband.

Bevor die Differenz in Abhängigkeit von der Photondichte, bei festgehaltener Dämpfung und Lichtkopplung, geplottet wird, wird noch die numerische Lösung für die Dichten ermittelt.

5.1.3 Numerische Lösung für verschiedene $g^{(2)}$

Die numerischen Lösungen wurden mittels des Runge-Kutta-Verfahrens 4. Ordnung ermittelt. Die Anfangswerte sind so gewählt, daß das System sich im Grundzustand befindet (Valenzbanddichte = 1, Leitungsbanddichte = 0). Zum Zeitpunkt $t=0$ gibt es kein Photon im System. Die Licht-Materie-Kopplung des elektronischen Systems wird im Vergleich zur gewählten Dämpfung als schwach angenommen. Strong-Coupling-Effekte spielen [PGR⁺07], da hier kein Resonator angenommen wird, keine Rolle.

Mittels Iteration wurden die Dynamiken berechnet und letztlich die Elektrondichte im Leitungsband geplottet. Die Photondichte beginnt bei Null und wird langsam erhöht, bis sie einen konstanten (stationären) Wert erreicht. In Abbildung 5.1(a) ist die Elektrondichte im Leitungsband über die Zeit für thermische wie kohärente Anregung geplottet. Man erkennt, wie die Elektrondichten langsam ansteigen und einen konstanten Wert erreichen. Der Bereich des stationären Limits ist hier

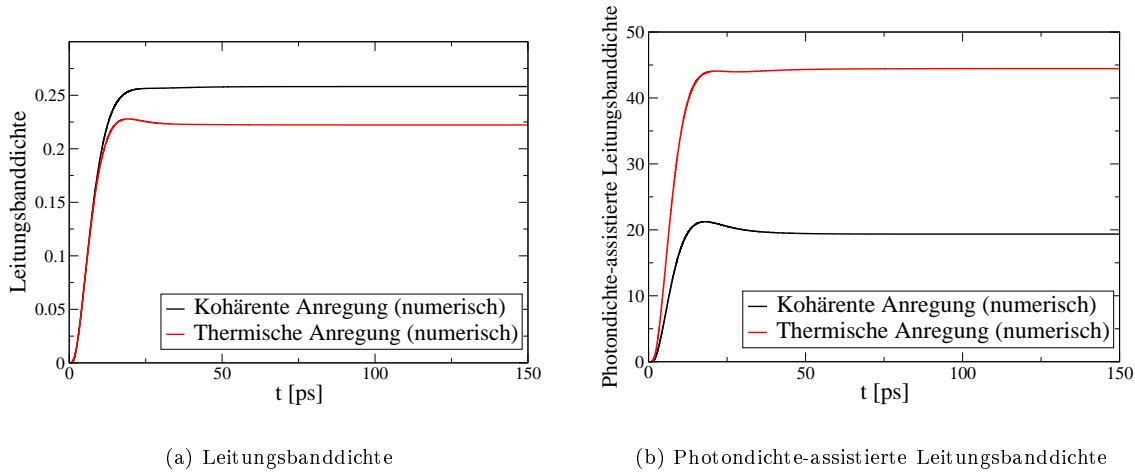


Abbildung 5.1: Leitungsbanddynamik eines isolierten Quantenpunktes: Stationär angeregt mit einem kohärenten (rot) und thermischen Lichtfeld (rot) - numerische Ergebnisse

ab 50ps erreicht und die Photondichte so gewählt, daß die Gültigkeit der gemachten Näherungen gewährleistet ist (Pulsfläche viel kleiner 1, Photonenzahl hoch genug für die Bornsche Näherung). Die Größen des elektronischen Systems befinden sich im Gleichgewicht und verändern sich nicht mehr. Die Wahrscheinlichkeit ein Elektron im Leitungsband zu finden, ist bei kohärenter Anregung (schwarze Linie) höher als bei thermischer Anregung (rot). Die erhöhte Korrelationsfunktion der Intensität im Falle thermischer Anregung hat einen negativen Effekt auf die Leitungsbanddynamik. Bei gleich eingestrahelter Energie wird weniger Energie auf das elektronische System übertragen als im Falle kohärenter Anregung. Dieser Effekt hängt von der Intensität des anregenden Feldes ab. Je höher die Intensität ist, desto größer der Unterschied.

Um dies zu verstehen, hilft es, sich die Dynamik der Photondichte-assistierten Leitungsbanddichte in Abbildung 5.1(b) anzusehen. Diese ist für thermische Anregung ungefähr zweimal so groß wie für kohärente Anregung. Das Verhältnis hat sich also umgedreht. In Gleichung 5.1.11 erkennt man, daß die Photondichte assistierte Elektronendichte in die Leitungsbanddynamik mit negativem Vorzeichen eingeht, die Anregung also bremst. Je höher sie ist, desto schneller füllt sich die Inversion und wird positiv, leitet also eine Oszillation ein. Die Photondichte-assistierte Leitungsbanddichte hängt jedoch stark von der gewählten Photonstatistik ab, wie man am Unterschied in Gleichung 5.1(b) und an der analytischen Lösung in Gleichung 5.1.13 erkennt. Konsequenz eines größeren $g^{(2)}$ ist die verringerte Wahrscheinlichkeit, ein Elektron im Leitungsband zu finden, selbst unter der Bedingung, daß die Intensität gleich ist. Physikalisch bedeutet dies, daß die geklumpten Photonen (im Bunching für thermisches Licht) weniger effizient die Leitungsbanddichte treiben, da sie ungeordnet und stark gebündelt ankommen. Sie gehen der Elektronendynamik verloren, falls Zwei-Photonen-Prozesse keine Rolle spielen, wie z.B. bei gekoppelten Systemen. Für 1-Photon-Prozesse ist es günstiger, wenn die Photonen wie beim kohärenten Licht wohlgeordnet das elektronische System erreichen.

5.1.4 Vergleich des numerischen mit dem analytischen Ergebnis

Zur Überprüfung des analytischen wie numerischen Ergebnisses, werden bei gleicher Parameterwahl die erreichten Leitungsbanddichten miteinander verglichen. In Abbildung 5.1.4 erkennt man, daß das numerische Ergebnis gegen das analytisch ermittelte konvergiert. Die anfängliche Abweichung zwischen Analytik und Numerik resultiert aus der langsamen Erhöhung der Photondichte. Sobald jedoch die Gültigkeit des stationären Limits erreicht ist (ca. nach 50ps), stimmen die Werte überein.

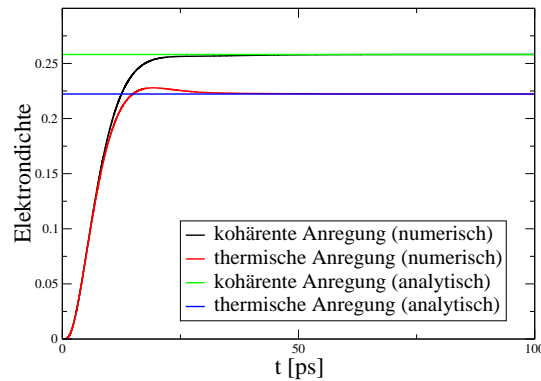


Abbildung 5.2: Leitungsbanddynamik eines isolierten Quantenpunktes: Vergleich des analytischen (grün, blau) mit dem numerischen Ergebnis (schwarz, rot).

Die Abweichung beträgt wenige Hundertstel Prozent und bestätigt die Gültigkeit der analytischen Lösung unter den gemachten Näherungen (Markov-Approximation für die Polarisationen).

5.1.5 Vergleich der Leitungsbanddichte für verschiedene $g^{(2)}$

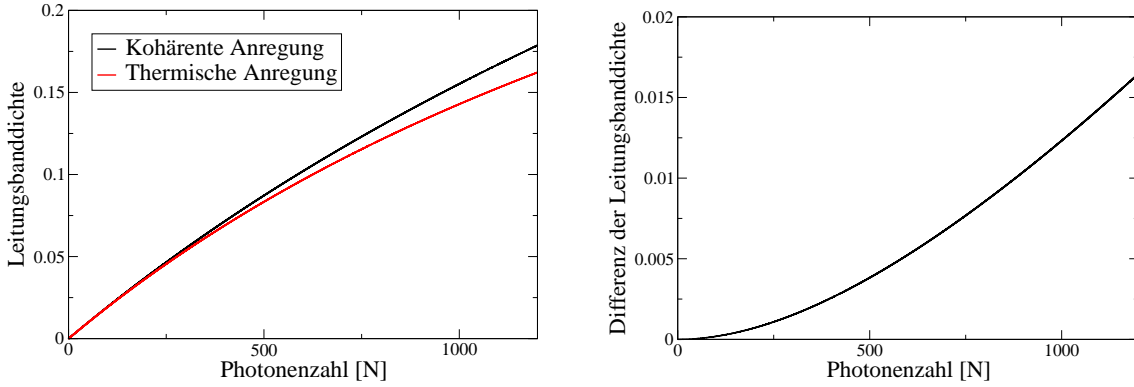
Die Korrelationsfunktion der 2. Ordnung geht erst in Termen der 4. Ordnung im Lichtkopplungselement ein. Würde man das Gleichungssystem in der 2. Ordnung schließen, könnten die photonstatistischen Effekte nicht beobachtet werden⁹. Es ist also zu erwarten, daß bei höheren Photondichten die Bedeutung der 4. Ordnung steigt und somit der Unterschied zwischen den verschiedenen Photonstatistiken in der Anregung stärker wird. Hierzu wird in einem ersten Schritt die analytische Lösung in Gleichung 5.1.14 mit den gegebenen Parametern berechnet und als Funktion der Photonenzahl geplottet, um dann die Differenz der Leitungsbanddichte über die Photondichte aufzutragen.

In Abbildung 5.3(a) ist die Leitungsbanddichte für kohärentes (schwarz) und thermisches Licht (rot) für verschiedene Photondichte geplottet. Für Photonenzahlen bis 3000 sind die Ergebnisse gültig, also hier im gültigen Bereich dargestellt. Wie erwartet, steigt die Wahrscheinlichkeit, ein Elektron im angeregten Zustand zu finden, mit der eingestrahlten Photondichte (Intensität). Man erkennt, daß der Unterschied für geringe Intensität vergleichsweise gering ausfällt, mit zunehmender Intensität sich die Graphen jedoch aufspreizen und deutlich voneinander zu unterscheiden beginnen. In Abbildung 5.3(b) ist die Differenz der jeweils im stationären Limit erreichten Leitungsbanddichte zwischen kohärenter und thermischer Anregung geplottet. Der Verlauf ist parabelförmig (Funktionen der 2. und 4. Ordnung im Kopplungselement) und positiv. Bei kohärenter Anregung steigt bei zunehmender Lichtintensität die Elektronendichte schneller. Bei einer Photonenzahl von 1000, die konstant in das System eingestrahlt werden, ist der Unterschied beinahe 10 %.

5.2 Nicht-stationäre Anregung

Bisher wurde die stationäre Anregung eines isolierten Quantenpunktes betrachtet. Das System konnte einen Gleichgewichtszustand erreichen, die Lösung analytisch berechnet werden. In diesem Abschnitt soll nun die nicht-stationäre Anregung eines Quantenpunktes untersucht werden. Sowohl die Faktorisierung wie die Pulsdefinition sind von denen im vorherigen Abschnitt zu unterscheiden. Im folgenden wird die Korrelationsentwicklung benötigt, um Singlett-Erwartungswerte für die kohärente Anregung konsistent in den Gleichungen zu berücksichtigen (siehe Abschnitt 2.5.2).

⁹Es sei denn, man würde eine effektive Mode des anregenden Lichtfeldes wählen und schon in der Art der Impulsverteilung und in der gewählten Faktorisierung ein Unterschied erzwingen. vgl. hierzu [KK06]



(a) Leitungsbanddichte als Funktion der Anregungsstärke (Photonenzahl)

(b) Differenz der Leitungsbanddichten als Funktion der Anregungsstärke

Abbildung 5.3: Leitungsbanddynamik eines isolierten Quantenpunktes: Unterschied zwischen kohärenter (schwarz) und thermisch (rot) erzeugter Anregung

Es wird nur bis zur 2. Ordnung in der Lichtkopplung faktorisiert, also zwei k -Summen ausgewertet. Nach Aufstellung der Bewegungsgleichungen mittels der Heisenberg-Bewegungsgleichung für Operatoren wird die Korrelationsentwicklung in ihrer Gültigkeit überprüft. Die Ergebnisse der Korrelationsentwicklung werden mit denen des Jaynes-Cummings-Modells verglichen, um Grenzen der Gültigkeit mittels der Pulsfläche auszudrücken. Im nächsten Schritt wird analytisch die kohärente mit der thermischen Anregung verglichen. Abschließend wird die analytische Lösung mit der numerischen verglichen.

5.2.1 Korrelierte Bewegungsgleichungen

Im Unterschied zur nicht-stationären Anregung unterscheiden sich bei stationärer Anregung die Bewegungsgleichungen, wenn kohärent oder thermisch angeregt wird. Im Falle eines kohärenten, einfallenden Lichtfeldes existieren die Singlett-Photon-Erwartungswerte¹⁰:

$$\langle c_k^\dagger \rangle \neq 0 \quad (5.2.16)$$

$$\langle c_k \rangle \neq 0. \quad (5.2.17)$$

Wie in Abschnitt 3.2.1 beschrieben, läßt sich mit diesen Erwartungswerten ein propagierender Lichtpuls beschreiben, der das elektronische System proportional zur gewählten Photonenzahl wie zur Lichtkopplung anregt. Die Faktorisierung muß dies berücksichtigen.

Im Falle thermischer Anregung existiert nur der Dublett-Erwartungswert:

$$\langle c_k^\dagger c_{k'} \rangle \neq 0. \quad (5.2.18)$$

¹⁰Es existieren auch Dublett-Erwartungswerte $\langle c_k c_{k'} \rangle$ und $\langle c_k^\dagger c_{k'}^\dagger \rangle$. Da die Anregung jedoch rein kohärent sein soll, tauchen diese erst als Antwort des Systems auf, die zu beschreiben hier nicht im Vordergrund steht.

Hieraus ergeben sich verschiedene Differentialgleichungssysteme. Folgende Abkürzung wird im folgenden für die Licht-Materie-Kopplung gelten:

$$\bar{M}_k^R = \frac{1}{\hbar} M_k^{vc} e^{-i(\omega_R - \omega_k)t} \quad (5.2.19)$$

$$\bar{M}_k^{R*} = -\frac{1}{\hbar} M_k^{cv} e^{i(\omega_R - \omega_k)t}, \quad (5.2.20)$$

wobei ω_R die Frequenz des gewählten Rotating-Frames ist, die für die RWA eingeführt wird, und ω_k die Frequenz des Lichtfeldes bezeichnet. Die Bewegungsgleichungen sind in der Rotating-Wave-Approximation aufgeschrieben.

5.2.1.1 Kohärente Anregung

Die Bewegungsgleichungen spaltet sich nach Faktorisierung in einen semiklassischen und einen quantenoptischen Anteil auf, wobei im semiklassischen Fall die elektronischen und photonischen Anteile komplett getrennt behandelt werden. Die quantenoptischen Effekte sind in diesem Bild stets Korrekturen zum semiklassischen Fall, in welchem angenommen wird, daß elektronische und photonische Erwartungswerte unabhängig voneinander sind. Für die Leitungsbanddichte ergibt sich:

$$\partial_t \langle a_c^\dagger a_c \rangle_R = -2 \Gamma \langle a_c^\dagger a_c \rangle + 2 \operatorname{Im} \left[\sum_k \bar{M}_k^R \langle c_k^\dagger \rangle_R \langle a_v^\dagger a_c \rangle_R + M_k^R \langle a_v^\dagger a_c c_k^\dagger \rangle_R^c \right]. \quad (5.2.21)$$

Das Γ leitet sich wie im Falle der stationären Anregung aus dissipativen Moden ab. Für die Polarisation folgt:

$$\begin{aligned} \partial_t \langle a_v^\dagger a_c \rangle_R &= (-i\omega_1 + i\omega_R - \Gamma) \langle a_v^\dagger a_c \rangle_R - i \sum_{k'} \bar{M}_{k'}^{R*} \langle c_{k'} \rangle_R \{ \langle a_c^\dagger a_c \rangle_R - \langle a_v^\dagger a_v \rangle_R \} \\ &\quad - i \sum_{k'} \bar{M}_{k'}^{R*} \left\{ \langle a_c^\dagger a_c c_{k'} \rangle_R^c - \langle a_v^\dagger a_v c_{k'} \rangle_R^c \right\}. \end{aligned} \quad (5.2.22)$$

Vernachlässigt man nun in Gleichung 5.2.21 und Gleichung 5.2.22 alle Erwartungswerte, die nur korreliert existieren, jene mit einem hochgestellten c , dann ergibt sich ein geschlossenes Gleichungssystem, das den Halbleiter-Bloch-Gleichungen entspricht und auch für nicht-stationäre Anregung analytisch gelöst werden kann. Die Lösung kann im Appendix A.13 nachgelesen werden. Für die restlichen Gleichungen sei auf den Appendix A.12 verwiesen. Quantenoptische Effekte wie die spontane Emission tauchen erst auf, wenn die Korrekturen mitgenommen werden. Stellvertretend für die in Abschnitt A.12 aufgeführten Gleichungen sei die Photon-assistierte Polarisation vorgestellt:

$$\begin{aligned} \partial_t \langle a_v^\dagger a_c c_k^\dagger \rangle_R &= (i\omega_R - i\omega_1 - \Gamma) \langle a_v^\dagger a_c c_k^\dagger \rangle_R - i \bar{M}_k^{R*} \left\{ \langle a_c^\dagger a_c \rangle_R^c - |\langle a_c^\dagger a_v \rangle_R^c|^2 \right\} \\ &\quad - i \sum_{k'} \bar{M}_{k'}^{R*} \langle c_{k'} \rangle \left\{ \langle a_c^\dagger a_c c_k^\dagger \rangle_R^c - \langle a_v^\dagger a_v c_k^\dagger \rangle_R^c \right\} \\ &\quad - i \sum_{k'} \bar{M}_{k'}^{R*} \langle c_k^\dagger c_{k'} \rangle_R^c \left\{ \langle a_c^\dagger a_c \rangle_R^c - \langle a_v^\dagger a_v \rangle_R^c \right\}. \end{aligned} \quad (5.2.23)$$

Je nach Lichtkopplungsstärke erhöht sich die Wichtigkeit der bedingten Wahrscheinlichkeiten zwischen dem elektronischen und photonischen System. Gleichung 5.2.23 stellt sicher, daß nach einer Anregung durch einen Puls die Leitungsbanddichte selbstkonsistent durch spontane Emission abgebaut wird. Dieses radiative Dephasing ist der prominenteste quantenoptische Effekt.

5.2.1.2 Thermische Anregung

Die Zahl der Bewegungsgleichungen für thermische Anregung ist deutlich kleiner als im Falle kohärenter Anregung, da Singlett-Erwartungswerte der Lichtoperatoren in einem thermischen Lichtfeld nicht existieren. Für die Besetzungsdichte im Leitungsband ergibt sich:

$$\partial_t \langle a_c^\dagger a_c \rangle_R = -2 \Gamma \langle a_c^\dagger a_c \rangle + 2 \operatorname{Im} \left[\sum_k \tilde{M}_k^R \langle a_v^\dagger a_c c_k^\dagger \rangle_R \right]. \quad (5.2.24)$$

Die Leitungsbanddichte ist nicht weiter faktorisierbar. Es muß also die Photon-assistierte Polarisation als Bewegungsgleichung herangezogen werden. Diese lautet in RWA:

$$\begin{aligned} \partial_t \langle a_v^\dagger a_c c_k^\dagger \rangle_R^c &= (i\omega_R - i\omega_1 - \Gamma) \langle a_v^\dagger a_c c_k^\dagger \rangle_R^c - i \bar{M}_k^{R*} \langle a_c^\dagger a_c \rangle_R^c \\ &\quad - i \sum_{k'} \bar{M}_{k'}^{R*} \langle c_k^\dagger c_{k'} \rangle_R^c \{ \langle a_c^\dagger a_c \rangle_R^c - \langle a_v^\dagger a_v \rangle_R^c \}. \end{aligned} \quad (5.2.25)$$

Wegen der spontanen Emission ändert sich auch die interne Photonendichte des Systems, die ebenfalls berücksichtigt werden muß und außerdem für das eingestrahlte Feld zur Beschreibung des thermischen Lichtpulses verwendet wird.

$$\partial_t \langle c_k^\dagger c_{k'} \rangle_R^c = i \tilde{M}_{k'}^R \langle a_v^\dagger a_c c_k^\dagger \rangle_R^c - i \tilde{M}_k^{R*} \langle a_c^\dagger a_v c_{k'} \rangle_R^c. \quad (5.2.26)$$

Höhere Ordnungen werden im folgenden vernachlässigt. Im nächsten Schritt muß untersucht werden, für welche Anregungsstärken und -zeiten die Korrelationsentwicklung in der vorgestellten Form Gültigkeit beanspruchen kann. Hierfür wird das Jaynes-Cummings-Modell herangezogen.

5.2.2 Gültigkeitsgrenzen der Korrelationsentwicklung

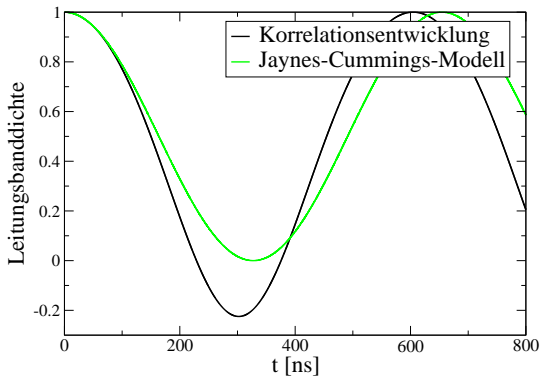
Die Korrelationsentwicklung ist eine formale Faktorisierung, die bedingte Wahrscheinlichkeiten approximiert und diese Näherung von Ordnung zu Ordnung korrigiert. Auf diese Weise wird das entstehende Differentialgleichungssystem auf gegebener Ordnung geschlossen. Noch nicht entschieden ist jedoch, ob die Korrelationsentwicklung für ein bestimmtes Problem eine gute Approximationsmethode ist, ob sie auf den vorliegenden Fall überhaupt angewendet werden kann und nicht Inkonsistenzen erzeugt. Dieser Abschnitt überprüft nun die Gültigkeitsgrenzen der Korrelationsentwicklung mit Hilfe des Jaynes-Cummings-Modells (JCM, Abschnitt 4) für den Fall einer 1-modigen, stationären Photonendichte. Das JCM ist unter diesen Voraussetzungen exakt und ermöglicht eine Abschätzung, ab welcher Pulsfläche die Korrelationsentwicklung stark von der exakten Lösung abweicht und höhere Ordnungen berücksichtigt werden müßten.

Es werden zwei Fälle betrachtet. Im ersten befindet sich das Elektron zum Zeitpunkt $t=0$ im Leitungsband. Im System befindet sich kein Photon. Eine Dämpfung ist ebenfalls nicht vorhanden. Wegen des Spontanen-Emissions-Prozesses (Vakuum-Rabi-Flopping¹¹) wird das Elektron mit einer von der Licht-Kopplungskonstanten abhängigen Wahrscheinlichkeit in das Valenzband übergehen. Ohne Dämpfung (nur für diesen Fall gilt die exakte Lösung) ergibt sich eine Rabi-Oszillation.

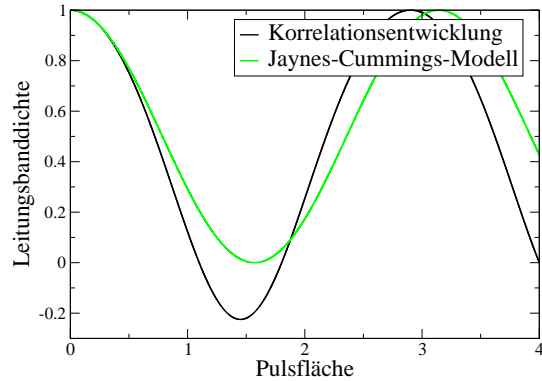
In Abbildung 5.4(a) ist zu erkennen, daß die analytische und die aus der Korrelationsentwicklung ermittelte Lösung für kleine Zeiten übereinstimmen. Die Leitungsbanddichten verhalten sich identisch. Ab 100ps ergeben sich jedoch stärker werdende Unterschiede und die Dynamik weicht fortan erheblich ab. Die Korrelationsentwicklung verliert ihre Gültigkeit. Um dieses Ergebnis auf die nicht-stationäre Anregung besser übertragen zu können, ist dieselbe Dynamik in Abbildung 5.4(b) über die Pulsfläche geplottet. Ab einer Pulsfläche von 0.25 sind die ersten Abweichungen zu erkennen. Ein Unterschied zwischen den Bewegungsgleichungen für den kohärenten und thermischen Fall kann sich nicht ergeben, da hier keine Anregung angenommen wird.

Im zweiten Fall wird die Gültigkeit der Korrelationsentwicklung mit derselben Anfangsbedingung

¹¹Experimentell in einer Kavität beobachtet.[BSKM⁺96]



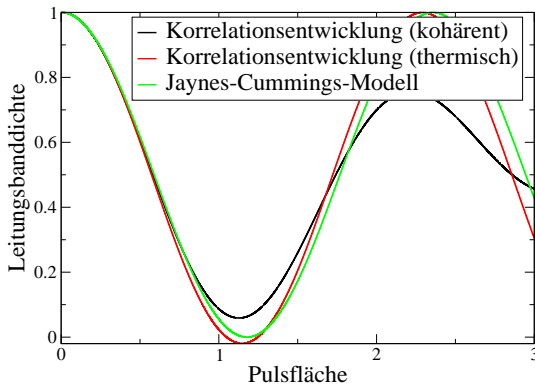
(a) Leitungsbanddichte im JCM als Funktion der Zeit



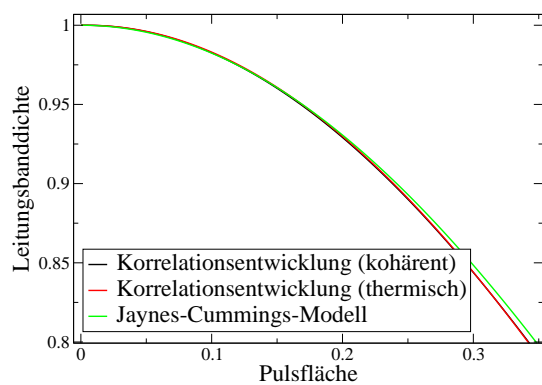
(b) Leitungsbanddichte im JCM als Funktion der Pulsfläche

Abbildung 5.4: Leitungsbanddichte eines isolierten Quantenpunktes: Lösung der Korrelationsentwicklung (schwarz) mit dem analytischen Ergebnis des Jaynes-Cummings-Modell (rot) verglichen - nicht angeregt.

nur mit einer konstant eingestrahlenen Photondichte überprüft. Die Zahl der Photonen ist gleich.



(a) schwach stationär angeregt



(b) Zoom

Abbildung 5.5: Leitungsbanddichte eines isolierten Quantenpunktes: Lösung der Korrelationsentwicklung für kohärentes (schwarz) und thermisches Lichtfeld (rot) mit dem analytischen Ergebnis des Jaynes-Cummings-Modell (grün) verglichen - stationär angeregt.

Wie erwartet zeigt sich in Abbildung 5.5(a) nun eine Abweichung zwischen kohärenter (schwarz) und thermischer Anregung (rot) wegen der unterschiedlichen Gleichungssysteme¹². Für kleine Pulsflächen gibt es dennoch eine gute Übereinstimmung mit der exakten Lösung (grün). Um den genauen Gültigkeitsbereich zu bestimmen, ist der entscheidende Bereich in Abbildung 5.5(b) noch einmal vergrößert worden. Man erkennt, daß für Pulsflächen kleiner als 0.5 die Korrelationsentwicklung eine gültige Methode darstellt. In den numerischen Berechnungen wird dies berücksichtigt und dementsprechend Photonenanzahl und Lichtkopplung gewählt, so daß dieser Bereich nicht überschritten wird.

¹²Es wird angenommen, daß bei kohärenter Anregung keine inkohärenten Anteile entstehen.

Die gezeigten Dynamiken beziehen sich auf stationäre Fälle und lassen sich nur approximativ auf den Fall einer Pulsanregung übertragen. Jedoch gibt es für eine nicht-stationäre, quantenoptische Anregung keine exakte allgemeine Lösung mehr.¹³

5.2.3 Puls-Anregung - analytisches Ergebnis

Der Quantenpunkt wird nun nicht-stationär angeregt. Um die Anregungsarten miteinander sinnvoll vergleichen zu können, wird gefordert, daß mittels thermischer wie kohärenter Anregung das System dieselbe Energie zugeführt bekommt. Dies wird gewährleistet durch:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \bar{M}_k^R \bar{M}_{k'}^{R*} \langle c_k^\dagger c_{k'} \rangle(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \bar{M}_k^R \langle c_k^\dagger \rangle(t) \bar{M}_{k'}^{R*} \langle c_{k'} \rangle(t). \quad (5.2.27)$$

Die Fragestellung ist nun, in welcher Photonstatistik sich möglicherweise eine effektivere Energieübertragung auf das elektronische System ergibt.

Die Bewegungsgleichungen zeigen eine bestimmte Kombination von k-Summen und Lichterwartungswerten, die sich bei kohärenter und thermischer Anregung voneinander unterscheiden. Bevor nun die Bewegungsgleichungen für nicht-stationäre Anregungstypen ausgewertet werden, können die Ergebnisse aus Abschnitt 3.2.2 und 3.2.1 verwendet werden, um die k-Summen und Lichterwartungswerte in zeitabhängige Anregungspulse analytisch umzurechnen.

Im thermischen Fall gilt für den Erwartungswert der Photondichte unter Verwendung von Gleichung 3.2.65 folgender Ausdruck:

$$\sum_{k'} \bar{M}_{k'}^{R*} \langle c_k^\dagger c_{k'} \rangle_R^c = f(k) \frac{\bar{M}^*}{4} e^{i\omega_R t} \Omega(t) \quad (5.2.28)$$

mit $\hbar \bar{M} = iX_{vc} \underline{\epsilon}_\mu \cdot \underline{d}_{vc}$ und

$$\Omega(t) = \sqrt{\frac{\sqrt{2\pi}N}{\tau}} \cos[\bar{\omega}(t-t_0)] e^{-\frac{(t-t_0)^2}{2\tau^2}}. \quad (5.2.29)$$

Im kohärenten Fall ergibt sich in den Bewegungsgleichungen folgender Ausdruck:

$$\sum_k \bar{M}_k^R \langle c_k^\dagger \rangle_R = \sum_k \bar{M} \sqrt{\frac{\hbar ck}{2\epsilon_0 \mathcal{A} \mathcal{L}}} e^{-i\omega_R t + ik(ct-r_{0n})} \langle c_k^\dagger \rangle_R.$$

Und für den Erwartungswert wird:

$$\langle c_k^\dagger \rangle_R = f(k) \quad (5.2.30)$$

eingesetzt, um Gleichung 5.2.27 zu erfüllen. Mit selber Rechnung wie im thermischen Fall ergibt sich:

$$\sum_k \bar{M}_k^R \langle c_k^\dagger \rangle_R = \frac{\bar{M}}{4} e^{-i\omega_R t} \Omega(t). \quad (5.2.31)$$

¹³Es gibt Möglichkeiten, aber mit spezieller Anregung, siehe zum Beispiel, [PY92], in der eine analytische Lösung für eine sech(t) Anregung gezeigt wird.

Bei sehr schwacher Anregung und sehr kleiner Licht-Materie-Kopplung können die quantenoptischen Effekte vernachlässigt werden. Bedingte Wahrscheinlichkeiten für die kohärente Anregung entfallen daher und für die Polarisation ergibt sich (Integrationskonstante null gesetzt) als Lösung:

$$\langle a_v^\dagger a_c \rangle_R(t) = -i \frac{M^*}{4} \int_{-\infty}^t dt' e^{i(\omega_1 - \omega_R)(t'-t)} \Omega(t') e^{i\omega_R t'} \{2 \langle a_c^\dagger a_c \rangle_R^c(t') - 1\}. \quad (5.2.32)$$

Eingesetzt in die Gleichung für die Dynamik der Leitungsbanddichte:

$$\begin{aligned} \partial_t \langle a_c^\dagger a_c \rangle_R &= \frac{|\bar{M}|^2}{8} e^{-i\omega_R t} \Omega(t) \\ &\quad \text{Im} \left[i \int_{-\infty}^t dt' e^{i(\omega_1 - \omega_R)(t'-t)} \Omega(t') e^{i\omega_R t'} \{1 - 2 \langle a_c^\dagger a_c \rangle_R^c(t')\} \right]. \end{aligned} \quad (5.2.33)$$

Im Falle thermischer Anregung unter Vernachlässigung des spontanen Emissionstermes wegen sehr schwacher Licht-Materie-Kopplung und geringer Anregungsstärke (das Leitungsband ist schwach populiert) lautet die formal integrierte Photon-assistierte Polarisation mit Gleichung 5.2.28:

$$\begin{aligned} \langle a_v^\dagger a_c c_k^\dagger \rangle_R &= i \sum_{k'} \int_{-\infty}^t dt \bar{M}_{k'}^{R*} \langle c_k^\dagger c_{k'} \rangle(t) \{1 - 2 \langle a_c^\dagger a_c \rangle_R^c(t)\} \\ &= -i f(k) \frac{M^*}{4} \int_{-\infty}^t dt' e^{i(\omega_1 - \omega_R)(t'-t)} \Omega(t') e^{i\omega_R t'} \{2 \langle a_c^\dagger a_c \rangle_R^c(t') - 1\}. \end{aligned}$$

Eingesetzt in die Gleichung für die Dynamik der Leitungsbanddichte und die k-Summe ausgewertet gemäß Gleichung 5.2.28:

$$\begin{aligned} \partial_t \langle a_c^\dagger a_c \rangle_R &= \frac{|\bar{M}|^2}{8} e^{-i\omega_R t} \Omega(t) \\ &\quad \text{Im} \left[i \int_{-\infty}^t dt' e^{i(\omega_1 - \omega_R)(t'-t)} \Omega(t') e^{i\omega_R t'} \{1 - 2 \langle a_c^\dagger a_c \rangle_R^c(t')\} \right]. \end{aligned} \quad (5.2.34)$$

Diese Gleichung stimmt exakt mit Gleichung 5.2.33 überein. Sind aber Differentialgleichungen identisch, so sind es auch die Lösungen und damit ist gezeigt, daß im Falle eines isolierten Quantenpunktes thermische wie kohärente Anregung, solange die quantenoptischen Beiträge vernachlässigt werden können, zu derselben Leitungsbanddynamik führen und eine Abhängigkeit von der Photonstatistik in dieser Ordnung nicht festzustellen ist. Dies gilt lediglich für das hier ausgewählte Anregungsschema, also für den vorgestellten thermischen Lichtpuls, der als Überlagerung zweier kohärenter Pulse eingeführt wurde (siehe Abschnitt 3.2.2). Bei einer anderen Pulsform, z.B. in einer effektiven 1moden-Näherung oder wenn dieselbe Rechnung zwei Ordnungen höher durchgeführt wird, muß sich sogar ein anderes Ergebnis einstellen, da wie im Falle der stationären Anregung $g^{(2)}$ für die unterschiedlichen Lichtfelder einen anderen Wert erhält und somit der Puls verändert wird.

5.2.4 Puls-Anregung - numerisches Ergebnis

Zur Überprüfung des analytischen Ergebnisses, in welchem die quantenoptischen Effekte wegen sehr geringer, eingestrahelter Lichtintensität und schwacher Lichtkopplung vernachlässigt wurden, wird nun das Gleichungssystem komplett numerisch mit allen quantenoptischen Beiträgen gelöst. Alle Terme bis zur 2.Ordnung werden einbezogen, die k-Summen werden ohne analytische Näherung ausgewertet und aus der gewählten Pulsform die Leitungsbanddynamik errechnet.

In Abbildung 5.2.4 ist der Puls (schwarz) und die Leitungsbanddynamik für kohärente (blau) wie thermische Anregung (rot) geplottet. Die numerischen Ergebnisse bestätigen die analytischen. Es

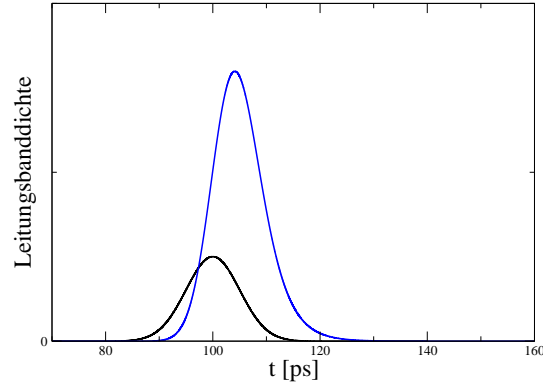


Abbildung 5.6: Leitungsbanddichte eines isolierten Quantenpunktes: Nicht-Stationär angeregt mit einem kohärenten (rot, nicht zu sehen) und thermischen Lichtfeld (blau) - numerisches Ergebnis

ist kein Unterschied zwischen den nicht-stationären Anregungsformen zu sehen, nicht in dieser Ordnung und nicht bei der gewählten Pulsform. Die Leitungsbanddichte verhält sich wie zu erwarten. Im Vergleich zum Puls leicht verzögert folgt sie der Anregung, erreicht den Höhepunkt und zerfällt wieder wegen der gewählten radiativen Dämpfung. Ein Unterschied zwischen den Anregungskurven wäre erst bei sehr hoher Vergrößerung eines Ausschnitts zu erkennen, in etwa von der Größenordnung der Licht-Kopplung. Solch geringe Abweichungen jedoch lassen sich nicht von numerischen Ungenauigkeiten unterscheiden und wären auch nicht meßbar.

Der Zerfall der Leitungsbanddichte hängt von der gewählten radiativen Dämpfung ab. Zur Illustration wurde bei gleichbleibender Pulsfläche, aber verschiedenen Dämpfungsstärken die Dynamik der Leitungsbanddichte geplottet. Es ergibt sich ein zu erwartendes Verhalten.

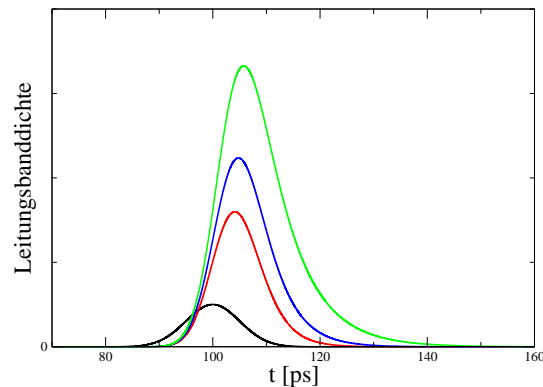


Abbildung 5.7: Leitungsbanddichte eines isolierten Quantenpunktes: Nicht-Stationär angeregt für verschiedene Dämpfungsstärken. $1\mu eV$ (rot), $0,75\mu eV$ (blau), $0,5\mu eV$ (grün), Gaußpuls (schwarz) - numerisches Ergebnis

In Abbildung 5.2.4 zeigt sich, daß mit abnehmender Dämpfung sowohl die Dichte einen höheren Wert erreicht, sowie das Maximum später erreicht wird. Je geringer die Dämpfung ist, desto länger summiert sich die Pulsfläche in der Inversion auf und ein höherer Wert der Leitungsbanddichte kann erreicht werden. Ohne Dämpfung jedoch wäre das System wegen der niedrigen Ordnung und des vergleichsweise engen Gültigkeitsbereiches der Korrelationsentwicklung, der durch die Dämpfung eingehalten wird, instabil und numerische Artefakte würden sich ergeben.

5.3 Quantenpunkt als nicht-klassische Lichtquelle

In diesem Abschnitt wird ein Beispiel für eine Lichtquelle gegeben, deren Photonstatistik über Materialparameter kontrolliert werden kann. Als Modell dient hier ein Ensemble von ungekoppelten Quantenpunkten in einem Resonator¹⁴, die je nach Zusammenspiel der Verluste und der Photonenzahlen Lichtfelder unterschiedlicher Photonstatistiken abstrahlen. Ein solcher Quantenpunkt-basierter Microcavity-Laser könnte als Lichtquelle für die in dieser Arbeit vorgeschlagenen Absorptionsversuche herangezogen werden. In den letzten Jahren sind viele Untersuchungen veröffentlicht worden, Quantenpunkt-Ensembles als nicht-klassische Lichtquellen vorzustellen.¹⁵ Nicht nur extrem nicht-klassisches Licht, also Anti-Bunching, ist zu kontrollieren möglich, sondern auch Bunching und je nach Cavity-Qualität auch kohärentes Licht als Resultat von Verstärkungsmechanismen in solchen Resonatoren. Gerade die Kontrollierbarkeit der Photon-Statistik des anregenden Feldes ist die notwendige Voraussetzung, die verschiedenen quantenoptischen Effekte nutzen zu können.

In dem nun vorgestellten Paper wird lediglich die Emission einer solchen Kavität beschrieben. Im Hamilton-Operator erscheint kein Pumpfeld, wie auch nicht auf die Frage von kohärenten und inkohärenten Anteilen innerhalb der Kavität eingegangen wird. Die Faktorisierung mittels der Korrelationsentwicklung geschieht im Sinne einer Bornschen-Näherung (nur Photondichten gleicher Moden existieren). Kavitätsverlust κ und phononisches Dephasing Γ sind phänomenologisch in den Gleichungen eingesetzt. Eventuelle Phasen zwischen den örtlich separierten Quantenpunkten wurden vernachlässigt.

Der gewählte Zugang erlaubt jedoch eine schnelle und vor allem analytische Herleitung der $g^{(2)}$ -Funktion, mit Aussagen, entsprechend den gewählten Limites, in welchen Fällen eine solche Kavität kohärentes, thermisches oder gequetschtes Licht mit Anti-Bunching ausstrahlt. Dies geschieht in drei Schritten. Zuerst werden bis zur 4. Ordnung im Lichtkopplungs-Element in RWA die Bewegungsgleichungen aufgestellt. Diese werden korreliert im Sinne der Bornschen Näherung und dann im stationären Limit ineinander eingesetzt. Für die entsprechenden Verhältnisse der Materialparameter, also je nach dem, ob induzierte oder spontane Emission überwiegen, werden die Gleichungen gelöst und die Korrelationsfunktion berechnet.

5.3.1 Korrelierte Bewegungsgleichungen

Über die Bewegungsgleichungen in Abschnitt 5.2.1 hinaus müssen die Bewegungsgleichungen auch für höhere Momente aufgestellt werden, um Größen zu bekommen, die von $g^{(2)}$ abhängen. Die Korrelationsentwicklung wird für die Lichterwartungswerte derart durchgeführt, daß nur Photondichten existieren, also im Rahmen der 4. Ordnung nur Quadrupletts und Dubletts. Singletts und Tripletts wären rein kohärente Anteile und werden in diesem hier vorgestellten Modell nicht berücksichtigt. Die Korrelationsfunktion der 2. Ordnung bekommt in der Korrelationsentwicklung wegen $\langle c^\dagger c^\dagger c c \rangle = \langle c^\dagger c^\dagger c c \rangle^c + 2 \langle c^\dagger c \rangle^2$ folgende Gestalt:

$$g^{(2)} = 2 + \frac{\langle c^\dagger c^\dagger c c \rangle^c}{\langle c^\dagger c \rangle^2}. \quad (5.3.35)$$

Da es sich um ein System von N Quantenpunkten handelt¹⁶, lauten die Bewegungsgleichungen in einer Microcavity mit einem Verlust κ pro Lichtoperator¹⁷ und Γ als phänomenologisches Dephasing

¹⁴Dieser Abschnitt faßt das Paper von [GWLJ07] zusammen, vgl. auch [FSKK06].

¹⁵[GSD+05], [RUG+01]

¹⁶Viele identische Quantenpunkte, deren Coulombwechselwirkung vernachlässigt wird, die aber dennoch so nah beieinander sind, daß die Ortsabhängigkeit in Bezug auf die Wellenlänge keine Rolle spielt

¹⁷[VWW01], Kapitel 9.

der Polarisation, das sich über die hier nicht mikroskopisch berücksichtigten Phonon-Elektron-Wechselwirkung begründet, wie folgt:

$$\partial_t \langle a_c^\dagger a_c \rangle = 2 \operatorname{Im} \left[\bar{M}_k \langle a_v^\dagger a_c c_k^\dagger \rangle^c \right] \quad (5.3.36)$$

$$\partial_t \langle a_v^\dagger a_v \rangle = - \partial_t \langle a_c^\dagger a_c \rangle \quad (5.3.37)$$

$$\partial_t \langle c_k^\dagger c_k \rangle^c = - 2\kappa \langle c_k^\dagger c_k \rangle^c - 2 N \operatorname{Im} \left[\bar{M}_k \langle a_v^\dagger a_c c^\dagger \rangle^c \right] \quad (5.3.38)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \langle a_v^\dagger a_c c_k^\dagger \rangle^c &= - (\kappa + \Gamma) \langle a_v^\dagger a_c c_k^\dagger \rangle^c - i \bar{M}_k^* \langle a_c^\dagger a_c \rangle - i \bar{M}_k^* \langle c_k^\dagger c_k \rangle \left[\langle a_c^\dagger a_c \rangle - \langle a_v^\dagger a_v \rangle \right] \\ &\quad - i \bar{M}_k^* \left[\langle a_c^\dagger a_c c_k^\dagger c_k \rangle^c - \langle a_v^\dagger a_v c_k^\dagger c_k \rangle^c \right], \end{aligned} \quad (5.3.39)$$

wobei davon ausgegangen wird, daß die Mode des ausgestrahlten Lichtfeldes ω_k der Bandlückenfrequenz $\omega = \omega_c - \omega_v$ entspricht. Für die höheren Korrelationsordnungen ergibt sich:

$$\begin{aligned} \partial_t \langle a_v^\dagger a_c c_k^\dagger c_k^\dagger c_k \rangle^c &= - (3\kappa + \Gamma) \langle a_v^\dagger a_c c_k^\dagger c_k^\dagger c_k \rangle^c + 4 \langle a_v^\dagger a_c c_k^\dagger \rangle \operatorname{Im} \left[\bar{M}_k \langle a_v^\dagger a_c c_k^\dagger \rangle \right] \\ &\quad - i \bar{M}_k^* \langle c_k^\dagger c_k^\dagger c_k c_k \rangle^c \left[\langle a_c^\dagger a_c \rangle - \langle a_v^\dagger a_v \rangle \right] - 2i \bar{M}_k^* \langle a_c^\dagger a_c c_k^\dagger c_k \rangle^c \end{aligned} \quad (5.3.40)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \langle a_c^\dagger a_c c_k^\dagger c_k \rangle^c &= - 2\kappa \langle a_c^\dagger a_c c_k^\dagger c_k \rangle^c + 2 \operatorname{Im} \left[\bar{M}_k \langle a_v^\dagger a_c c_k^\dagger \rangle \right] \left[\langle a_c^\dagger a_c \rangle + \langle c_k^\dagger c_k \rangle \right] \\ &\quad + 2 \operatorname{Im} \left[\bar{M}_k \langle a_v^\dagger a_c c_k^\dagger c_k^\dagger c_k \rangle^c \right] \end{aligned} \quad (5.3.41)$$

$$\partial_t \langle a_v^\dagger a_v c_k^\dagger c_k \rangle^c = - \partial_t \langle a_c^\dagger a_c c_k^\dagger c_k \rangle^c. \quad (5.3.42)$$

Um $g^{(2)}$ berechnen zu können, muß noch die Bewegungsgleichung für den 4er-Erwartungswert der Photondichte aufgestellt werden:

$$\partial_t \langle c_k^\dagger c_k^\dagger c_k c_k \rangle = - 4\kappa \langle c_k^\dagger c_k^\dagger c_k c_k \rangle - 4 N \operatorname{Im} \left[\bar{M}_k \langle a_v^\dagger a_c c_k^\dagger c_k^\dagger c_k \rangle \right]. \quad (5.3.43)$$

Das Gleichungssystem ist geschlossen und kann nun im stationären Limit ausgewertet werden.

5.3.2 Stationäre Lösung für $\langle c^\dagger c^\dagger c c \rangle^c$

Um den 4er-Erwartungswert des Lichtfeldes zu berechnen, müssen die gekoppelten korrelierten Bewegungsgleichungen gelöst werden. Im folgenden wird davon ausgegangen, daß das System sich im Gleichgewicht befindet, also keine zeitliche Entwicklung stattfindet und die jeweiligen Bewegungsgleichungen lediglich ineinander eingesetzt werden müssen, um zu einem Resultat für $\langle c^\dagger c^\dagger c c \rangle^c$ zu gelangen. Zwei Grenzfälle können unterschieden werden: die Dominanz der spontanen und die der induzierten Emission.

5.3.2.1 Induzierte Emission

Wenn die induzierte Emission der dominierende Prozeß in der Kavität ist, können die Terme der spontanen Emission vernachlässigt werden. Jene sind daran zu erkennen, daß sie nur von den elektronischen Besetzungsdichten abhängen, also nicht zusammen mit der Photondichte verschwinden. Die Bewegungsgleichungen vereinfachen sich zu:

$$\langle a_v^\dagger a_c c_k^\dagger \rangle^c = - i \frac{\bar{M}_k^*}{\kappa + \Gamma} \left[\langle c_k^\dagger c_k \rangle \left[\langle a_c^\dagger a_c \rangle - \langle a_v^\dagger a_v \rangle \right] + 2 \langle a_c^\dagger a_c c_k^\dagger c_k \rangle^c \right] \quad (5.3.44)$$

$$\langle a_c^\dagger a_c c_k^\dagger c_k \rangle^c = \frac{1}{\kappa} \left[\operatorname{Im} \left[\bar{M}_k \langle a_v^\dagger a_c c_k^\dagger \rangle \right] \langle c_k^\dagger c_k \rangle + \operatorname{Im} \left[\bar{M}_k \langle a_v^\dagger a_c c_k^\dagger c_k^\dagger c_k \rangle^c \right] \right]. \quad (5.3.45)$$

Setzt man in Gleichung 5.3.45

$$\partial_t \langle c_k^\dagger c_k^\dagger c_k c_k \rangle = -\frac{N}{\kappa} \operatorname{Im} \left[\bar{M}_k \langle a_v^\dagger a_c c_k^\dagger c_k^\dagger c_k \rangle \right] \quad (5.3.46)$$

$$\partial_t \langle c_k^\dagger c_k \rangle = -\frac{N}{\kappa} \operatorname{Im} \left[\bar{M}_k \langle a_v^\dagger a_c c_k^\dagger \rangle \right] \quad (5.3.47)$$

ein, so erhält man

$$\langle a_c^\dagger a_c^\dagger c_k^\dagger c_k \rangle^c = -\frac{1}{N} \left[\langle c_k^\dagger c_k \rangle^2 + \langle c_k^\dagger c_k^\dagger c_k c_k \rangle^c \right],$$

und dies in Gleichung 5.3.44 eingesetzt und damit Gleichung 5.3.47 ausgewertet und nach $\langle c_k^\dagger c_k^\dagger c_k c_k \rangle^c$ umgestellt, ergibt

$$\langle c_k^\dagger c_k^\dagger c_k c_k \rangle^c = -\langle c_k^\dagger c_k \rangle^2 - \frac{\kappa(\kappa + \Gamma)}{2 |M_k|^2} \langle c_k^\dagger c_k \rangle^c \left[1 + \frac{N |M_k|^2}{\kappa(\kappa + \Gamma)} [\langle a_v^\dagger a_v \rangle - \langle a_c^\dagger a_c \rangle] \right].$$

Nun kann $g^{(2)}$ aus Gleichung 5.3.35 berechnet werden. Unter der Bedingung, daß die Photonenzahl viel größer als die Anzahl der emittierenden Quantenpunkte ist $\langle c^\dagger c \rangle \gg N$, also auch viel größer als 1, ergibt sich:

$$g^{(2)} = 1. \quad (5.3.48)$$

Das abgestrahlte Lichtfeld ist nach Definition (vgl. Abschnitt 3.1.5) kohärent. Die Quantenpunkte emittieren in eine Richtung (Vernachlässigung der spontanen Emission) Photonen mit der Bandlückenfrequenz ω .

5.3.2.2 Spontane Emission

Im Limit, daß die spontane Emission überwiegt, entfallen alle von der Photondichte abhängigen Terme in der 2. Ordnung im Lichtkopplungselement. Die Gleichungen vereinfachen sich zu:

$$\langle a_v^\dagger a_c c_k^\dagger \rangle = -i \frac{\bar{M}_k^*}{\kappa + \Gamma} \langle a_c^\dagger a_c \rangle \quad (5.3.49)$$

$$\langle c_k^\dagger c_k \rangle = \frac{N |\bar{M}_k|^2}{\kappa(\kappa + \Gamma)} \langle a_c^\dagger a_c \rangle \quad (5.3.50)$$

$$\langle a_c^\dagger a_c c_k^\dagger c_k \rangle = -\frac{1}{N} \left[\frac{\kappa(\kappa + \Gamma)}{N |M_k|^2} \langle c_k^\dagger c_k \rangle^2 + \langle c_k^\dagger c_k \rangle^2 + \langle c_k^\dagger c_k^\dagger c_k c_k \rangle^c \right] \quad (5.3.51)$$

$\langle c_k^\dagger c_k^\dagger c_k c_k \rangle^c$ in Gleichung 5.3.47 muß nun über $\langle a_v^\dagger a_c c_k^\dagger c_k^\dagger c_k \rangle^c$ ausgerechnet werden:

$$\langle a_v^\dagger a_c c_k^\dagger c_k^\dagger c_k \rangle^c = \frac{i M_k^*}{3\kappa + \Gamma} \left[\left\{ \frac{2\kappa(3\kappa + \Gamma)}{N^2 |\bar{M}_k|^2} + \frac{2}{N} \right\} \langle c_k^\dagger c_k \rangle^2 + \left\{ \frac{2}{N} - \langle a_c^\dagger a_c \rangle + \langle a_v^\dagger a_v \rangle \right\} \langle c_k^\dagger c_k^\dagger c_k c_k \rangle^c \right].$$

Man erhält Gleichung 5.3.52 in Gleichung 5.3.47 und dies in Gleichung 5.3.35 eingesetzt:

$$\left[g^{(2)} - 2 \right] \left[\frac{\kappa(3\kappa + \Gamma)}{N |M_k|^2} - \frac{2}{N} + \langle a_c^\dagger a_c \rangle - \langle a_v^\dagger a_v \rangle \right] = -\frac{2\kappa(3\kappa + \Gamma)}{N^2 |M_k|^2} - \frac{2}{N}. \quad (5.3.52)$$

Zur weiteren Auswertung geht man in das Bad-Cavity-Limit, in welchem die Verlustrate (ausgedrückt durch κ) viel größer als die Zahl der durch spontane Emission erhaltenen Photonen ist, also:

$$\Lambda = \frac{\kappa^2}{N |\bar{M}_k|^2} \gg 1 \quad (5.3.53)$$

gilt. Mit Λ ausgedrückt bekommt die Korrelationsfunktion den Ausdruck:

$$\left[g^{(2)} - 2 \right] \left[3\Lambda + \frac{\kappa\Gamma}{N |\bar{M}_k|^2} - \frac{2}{N} + \langle a_c^\dagger a_c \rangle - \langle a_v^\dagger a_v \rangle \right] = -\frac{6}{N} \Lambda - \frac{2\kappa\Gamma}{N^2 |\bar{M}_k|^2} - \frac{2}{N}.$$

Alle Terme, die nicht proportional zu Λ gehen, werden in diesem Limit vernachlässigt. Es folgt:

$$g^{(2)} = 2 - \frac{2}{N}. \quad (5.3.54)$$

Man sieht, daß für viele emittierende Quantenpunkte in der Microcavity ($N \gg 1$), die Korrelationsfunktion sich dem Wert 2 nähert (d.h., ein durch spontane Emission erzeugtes thermisches Lichtfeld aussendet), hingegen für $N = 1$ die Korrelationsfunktion null wird, also die Lichtquelle ein Single-Photon-Emitter ist.

6 Zwei gekoppelte Quantenpunkte

Ziel der Arbeit ist es, den Einfluß der Photonstatistiken auf die Leitungsbanddynamik von gekoppelten Nanostrukturen, hier Quantenpunkten, zu untersuchen. Besonders im Hinblick darauf, daß der für die Photosynthese wichtige Light-Harvesting-Complex-II (LHC-II) durch gekoppelte Zwei-Niveau-Systeme beschrieben kann [RAK⁺06] und das Sonnenlicht thermisch und daher quantenoptisch beschrieben werden muß, macht die Ergebnisse des folgenden Abschnittes interessant. Es zeigt sich, daß in der Natur die Anregungsprozesse in gekoppelten Nanostrukturen für thermisches und nicht für kohärentes Licht optimiert sind.

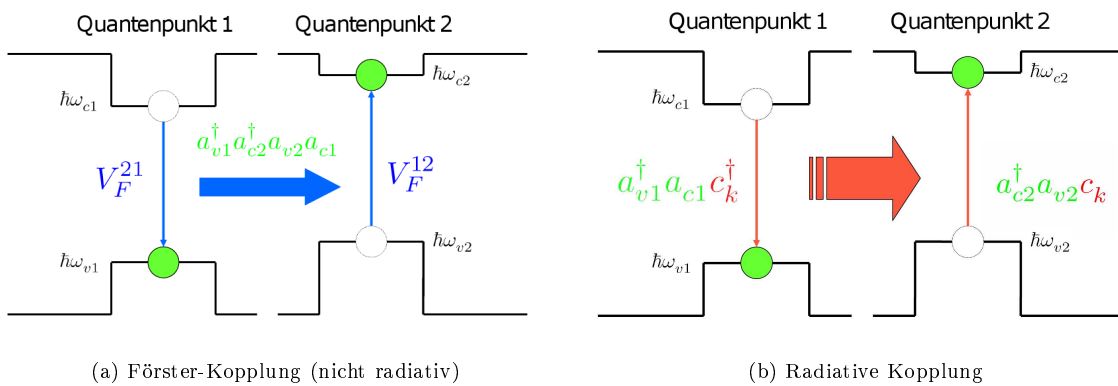


Abbildung 6.1: Schematische Darstellung der Förster- und der radiativen Kopplung zweier Coulomb-gekoppelter Quantenpunkte (dargestellt in lokaler Basis)

In Abbildung 6.1 sind die zwei in dieser Arbeit berücksichtigten Kopplungen dargestellt: die radiative und die Förster-Kopplung. Die Förster-Kopplung ist nicht radiativ. Das Exziton transferiert sich elektronisch. Es werden weder Photonen emittiert noch absorbiert. Im Gegensatz dazu ist die radiative Kopplung rein photonisch. Die Anregung in einem Quantenpunkt zerfällt, ein Photon wird emittiert und vom anderen Quantenpunkt absorbiert, wodurch ebenfalls ein Exzitontransfer realisiert wird, aber radiativ.

Unter Berücksichtigung dieser beiden Wechselwirkungen werden in diesem Abschnitt zwei gekoppelte Quantenpunkte untersucht. Mögliche Tunneleffekte werden vernachlässigt.

6.1 Der Hamilton-Operator gekoppelter Quantenpunkte

Der Hamilton-Operator zweier gekoppelter Quantenpunkte muß nicht nur die freie Energie der Elektronen (in effektiver Massennäherung), die freie Energie der Photonen, wie die Elektron-Licht-Wechselwirkung jeweils am Ort des Quantenpunktes berücksichtigen, sondern darüberhinaus die abstandsabhängige Coulombwechselwirkung betrachten (Abschnitt 2.3.2). Die Coulombwechsel-

wirkung wird hier in Voraussicht, daß später die Rotating-Wave-Approximation angewendet wird, ohne den Monopol-Dipol-Anteil aufgeschrieben, der in der RWA wegfällt [DAFK06]:

$$\begin{aligned}
H = & \sum_n [\hbar\omega_{vn} a_{vn}^\dagger a_{vn} + \hbar\omega_{cn} a_{cn}^\dagger a_{cn}] + \sum_k \hbar\omega_k c_k^\dagger c_k + \\
& + V_F^{12} a_{c1}^\dagger a_{v2}^\dagger a_{c2} a_{v1} + V_F^{21} a_{v1}^\dagger a_{c2}^\dagger a_{v2} a_{c1} + \\
& + V_{vc}^{12} a_{c1}^\dagger a_{v2}^\dagger a_{v2} a_{c1} + V_{cv}^{21} a_{v1}^\dagger a_{c2}^\dagger a_{c2} a_{v1} + \\
& + V_{cc}^{12} a_{c1}^\dagger a_{c2}^\dagger a_{c2} a_{c1} + V_{vv}^{12} a_{v1}^\dagger a_{v2}^\dagger a_{v2} a_{v1} + \\
& + \sum_{kn} M_{kn}^{vc} a_{vn}^\dagger a_{cn} [c_k - c_k^\dagger] + \sum_{kn} M_{kn}^{cv} a_{cn}^\dagger a_{vn} [c_k - c_k^\dagger].
\end{aligned} \tag{6.1.1}$$

Es ist günstig, den Hamilton-Operator in einer Zwei-Teilchen-Basis auszudrücken [DAFK06]. Unter der Voraussetzung, daß die Elektronen den Quantenpunkt nicht verlassen können, fallen Tunnel-effekte weg, die Elektronen sind lokalisiert und die Gesamtdynamik des Systems läßt sich durch folgende Operatoren ausdrücken [RAK⁺06]:

$$G = a_{v1}^\dagger a_{v2}^\dagger a_{v2} a_{v1} \tag{6.1.2}$$

$$P_1^1 = a_{v1}^\dagger a_{v2}^\dagger a_{v2} a_{c1} \tag{6.1.3}$$

$$P_2^1 = a_{v1}^\dagger a_{v2}^\dagger a_{c2} a_{v1} \tag{6.1.4}$$

$$P^2 = a_{v1}^\dagger a_{v2}^\dagger a_{c2} a_{c1}, \tag{6.1.5}$$

wobei G den Grundzustandsoperator, $P_i^{1\dagger}$ die Anregung eines Elektrons vom Grundzustand in das Leitungsband im Quantenpunkt i und P^2 den Übergang zweier Elektronen vom Grundzustand in das Leitungsband von Quantenpunkt 1 und 2 beschreibt. In Abbildung 6.2 ist dies zur Verdeutli-

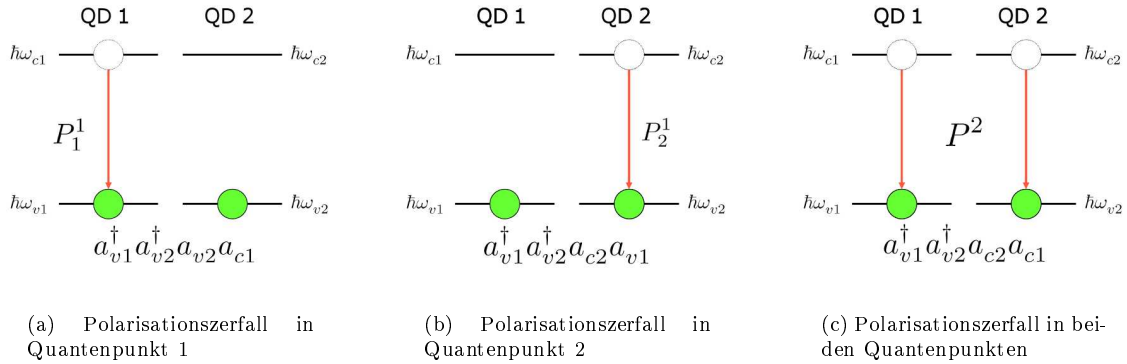


Abbildung 6.2: Lokale Operatoren zweier Coulomb-gekoppelter Quantenpunkte

chung schematisch dargestellt.

Die Elektronendichten in den Quantenpunkten sind konstant. Das Gesamtsystem läßt sich als Tensorprodukt von den Dichtematrizen der gekoppelten Quantenpunkte beschreiben [Rit06]. Die Spur der beiden Dichtematrizen ist 1. Die Spur des Gesamtsystems also 2. Diese Eigenschaft trägt der Tatsache Rechnung, daß das Elektron den Quantenpunkt nicht verlassen kann.

Der Hamilton-Operator des elektronischen Anteils bekommt als Matrix geschrieben folgende Gestalt:

$$H_{0e} = \begin{pmatrix} \hbar\omega_{v1} + \hbar\omega_{v2} + V_{vv} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hbar\omega_{c1} + \hbar\omega_{v2} + V_{vc} & V_F^{21} & 0 \\ 0 & V_F^{12} & \hbar\omega_{c2} + \hbar\omega_{v1} + V_{cv} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \hbar\omega_{c1} + \hbar\omega_{c2} + V_{cc} \end{pmatrix}.$$

Die Coulombwechselwirkung verändert die Diagonalelemente und führt zwei Nicht-Diagonalelemente ein. Die Veränderung der Diagonalelemente sind Energie-Shifts. Durch die Anwesenheit des zweiten Elektrons verschiebt sich die Anregungs- wie Grundzustandsenergie des ersten Elektrons. Diese Shifts implizieren keine neue Kopplung wie die Förster-Wechselwirkung, verändern jedoch das Energieschema des Systems (siehe Abbildung 2.3).

Die Nicht-Diagonal-Elemente, die sogenannte Förster-Kopplung, verändern im Gegensatz zu den Diagonalelementen die Dynamik der isolierten Zwei-Niveau-Systeme stark. Durch ihre Nicht-Diagonalität werden die Zwei-Niveau-Systeme in ein 4-Niveau-System verwandelt, können also nicht mehr unabhängig voneinander angeregt werden (siehe Abbildung 2.4). Eine isolierte Anregung ist nicht mehr möglich und der angeregte Zustand geht in einen nicht-lokalen Zustand über [UML⁺05]. Im folgenden wird der elektronische Anteil des Hamilton-Operators diagonalisiert, um der Nicht-Lokalität der Anregung Rechnung zu tragen.

6.2 Exziton-Basis

In der Exziton-Basis soll der elektronische Anteil des Hamilton-Operators diagonal sein. Im Falle zweier Quantenpunkte beschränkt sich die Rechnung auf die Diagonalisierung einer 2x2-Matrix, da der Grundzustandsoperator wie auch der Biexzitonische Operator bereits Eigenvektoren in der Basis sind ([RAK⁺06], [Ric07]). Es müssen nur die durch die Förster-Kopplung verschränkten Polarisationen diagonalisiert werden (siehe A.16 für die analytische Rechnung). Allgemein ergibt sich ($m=1,2$):

$$B_m^1 = \sum_i d_i^m P_i^1 \longleftrightarrow P_j^1 = \sum_m d_j^{m*} B_m^1, \quad (6.2.6)$$

Die nicht-lokalen Polarisationen erzeugen Quasi-Teilchen namens Exzitonen. Aufgrund der hier

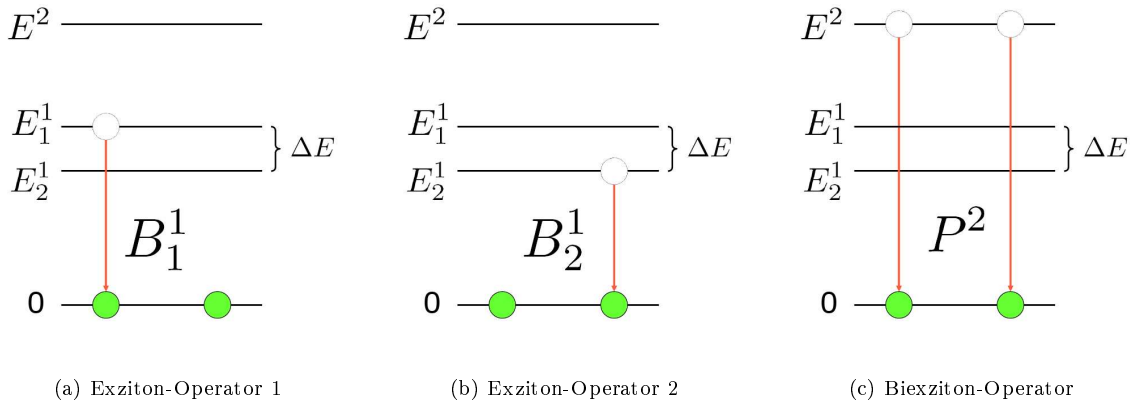


Abbildung 6.3: Nicht-lokale, exzitonische Operatoren zweier Coulomb-gekoppelter Quantenpunkte zugrundeliegenden Struktur gibt es zwei Single-Exzitonen und ein Biexziton. Die gekoppelten Zwei-

Niveau-Systeme gehen über in ein 4-Niveau-System mit dem Energieschema, wie es in Abbildung 6.3 dargestellt ist. Die Förster-Kopplung erzwingt stets ein Splitting ΔE zwischen den beiden Energie-Niveaus der Exzitonen. In der analytischen Rechnung A.16 kann die Abhängigkeit dieses Splittings von der Stärke der Förster-Kopplung abgelesen werden:

$$\Delta E = \sqrt{\Delta\omega + 4|V_F|^2} \quad (6.2.7)$$

mit $\Delta\omega = (\epsilon_1 + V_{vc}) - (\epsilon_2 + V_{cv})$. Selbst wenn die Bandlückenenergien wie die Single-Exzitonische Verschiebung gleich sind, reicht eine von Null verschiedene Förster-Wechselwirkung aus, um ein Energiesplitting zu erzwingen. Eine starke Förster-Wechselwirkung läßt die Bandlückenfrequenzen auseinander streben, so daß selbst identische Quantenpunkte nicht mehr zugleich resonant angeregt werden können, also nur noch eine Exzitondichte resonant getrieben werden kann (von einem lmodigen Lichtfeld).

In der Basis der Eigenvektoren des elektronischen Anteils des Hamilton-Operators ($H_{0e} = H_e + H_{e-e}$) ergeben sich folgende Zusammenhänge¹⁸:

$$G H_{0e} = H_{0e} G = 0 \quad (6.2.8)$$

$$B_m^1 H_{0e} = E_m^1 B_m^1 \quad (6.2.9)$$

$$H_{0e} B_m^1 = 0 \quad (6.2.10)$$

$$P^2 H_{0e} = E^2 P^2 \quad (6.2.11)$$

$$H_{0e} P^2 = 0. \quad (6.2.12)$$

In Appendix A.15 ist die Licht-Elektron-Wechselwirkung in der Zwei-Elektronen-Basis aufgeschrieben und kann nun mittels einfacher Umrechnung in die Exziton-Basis umgeschrieben werden. Es ergibt sich folgende Form für die Licht-Materie-Wechselwirkung (keine RWA durchgeführt):

$$\begin{aligned} H_{e-pt} = & - \sum_{km} M_{km} G^\dagger B_m^1 (c_k^\dagger - c_k) + M_{km}^* B_m^{1\dagger} G (c_k - c_k^\dagger) \\ & - \sum_{km} M_{km,2} B_m^{1\dagger} P^2 (c_k^\dagger - c_k) + M_{km,2}^* P^{2\dagger} B_m^1 (c_k - c_k^\dagger). \end{aligned}$$

Das einfallende Lichtfeld treibt nicht nur die Polarisation vom Grundzustand in den Single-Exziton-Zustand, sondern zugleich den Übergang vom Single-Exziton in den Biexziton-Zustand. Durch die Diagonalisierung haben sich jedoch die durch die Lichtkopplungselemente ausgedrückten Dipolmomente ebenfalls verändert. Auch diese sind nicht-lokal dargestellt und ergeben sich aus der Diagonalisierungsvorschrift wie folgt:

$$M_{km} = \sum_n M_{kn}^{vc} d_n^{m*} \quad (6.2.13)$$

$$M_{km,2} = \sum_{i,n \neq i} M_{kn}^{vc} d_i^m. \quad (6.2.14)$$

Im Appendix A.16 ist aufgeführt, wie z.B. die Zahlen d_n^m mit den Shifts und der Försterkopplung zusammenhängen. Es zeigt sich, daß die Eigenvektoren so gerichtet sind, daß das eine Dipolmoment zugunsten des anderen fast verschwindet, falls identische Quantenpunkte angenommen werden.

¹⁸Der Einfachheit halber ist die Grundzustandsenergie Null gesetzt.

Für die Licht-Elektron-Wechselwirkung müssen die Kommutatoren mit dem Hamilton-Operator H_{e-p} 2.3.9 ausgerechnet werden (m zählt den Quantenpunkt (1,2) und k die Mode):

$$\begin{aligned} [H_{e-p}, G] &= \sum_{km} M_{km}^* \left[B_m^{1\dagger} G c_k^\dagger - B_m^{1\dagger} G c_k \right] \\ &+ \sum_{km} M_{km} \left[G^\dagger B_m^1 c_k^\dagger - G^\dagger B_m^1 c_k \right] \end{aligned} \quad (6.2.15)$$

$$\begin{aligned} [H_{e-p}, B_m^1] &= \sum_{kj} M_{kj}^* \left[B_j^{1\dagger} B_m^1 c_k^\dagger - B_j^{1\dagger} B_m^1 c_k \right] \\ &+ \sum_k M_{km,2} \left[G^\dagger P^2 c_k^\dagger - G^\dagger P^2 c_k \right] \\ &+ \sum_k M_{km}^* \left[G^\dagger G c_k - G^\dagger G c_k^\dagger \right] \end{aligned} \quad (6.2.16)$$

$$\begin{aligned} [H_{e-p}, P^2] &= \sum_{km} M_{km}^* \left[B_m^{1\dagger} P^2 c_k^\dagger - B_m^{1\dagger} P^2 c_k \right] \\ &+ \sum_{mk} M_{km,2}^* \left[G^\dagger B_m^1 c_k - G^\dagger B_m^1 c_k^\dagger \right]. \end{aligned} \quad (6.2.17)$$

Die Bewegungsgleichungen werden mittels der Heisenberg-Bewegungsgleichung aufgestellt:

$$i\hbar\partial_t B_m^i = [B_m^i, H] = B_m^i H_{0e} + B_m^i H_{e-p} - H_{e-p} B_m^i. \quad (6.2.18)$$

Es werden Größen vernachlässigt, die von Operatorkombinationen abhängen, die wegen der 1-Elektron-Annahme pro Quantenpunkt und der Beschränkung auf 2 Quantenpunkte im Erwartungswert verschwinden, bspw. $(B_m^1)^\dagger B_j^1 G$. Dies ist keine Approximation. Das elektronische System wird durch diese Basis exakt beschrieben.

In den nächsten Abschnitten werden nun verschiedene Anregungssituationen untersucht.

6.3 Stationäre Anregung

Wie im Falle des isolierten Quantenpunktes werden die gekoppelten Quantenpunkte zuerst stationär angeregt. Die Bewegungsgleichungen werden bis zur 4. Ordnung im Licht-Kopplungselement aufgestellt und mittels der Bornschen Näherung faktorisiert. In Abbildung 6.4 sind zur Übersicht die verschiedenen Pfade dargestellt, die sich in einem System mit zwei Coulomb-gekoppelten Quantenpunkten ergeben. In der nicht-lokalen Basis ergibt sich ein übersichtliches Schema. Dennoch verhindern die Größen $\langle B_2^{1\dagger} B_1^1 \rangle$ und $\langle P^{2\dagger} P^2 c_k c_k \rangle$ eine einfache analytische Lösung. Der Exzitontransfer und der Übergang vom Grundzustand in den biexzitonischen Zustand bricht die Symmetrie in den Bewegungsgleichungen, daß Dichten von Polarisationen, Polarisationen von Dichten abhängen. Dies wird im nächsten Abschnitt gezeigt, in welchem die erforderlichen Bewegungsgleichungen aufgestellt und die einzelnen Operatorkombinationen diskutiert werden.

6.3.1 Bewegungsgleichungen in RWA

Zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen in der Rotating-Wave-Approximation wurden die Kommutatoren aus Gleichung 6.2.15, 6.2.16 und 6.2.17 verwendet. Die Lichtmode k ist fest gewählt. Es wird 1modig angeregt. Die Dämpfung ergibt sich aus dissipative Moden, in die die Quantenpunkte via spontane Emission abstrahlen, die aber das System nicht treiben. Die Herleitung der Dämpfungsgrößen (die Einstein-Koeffizienten) für das gekoppelte System ist im Appendix A.10

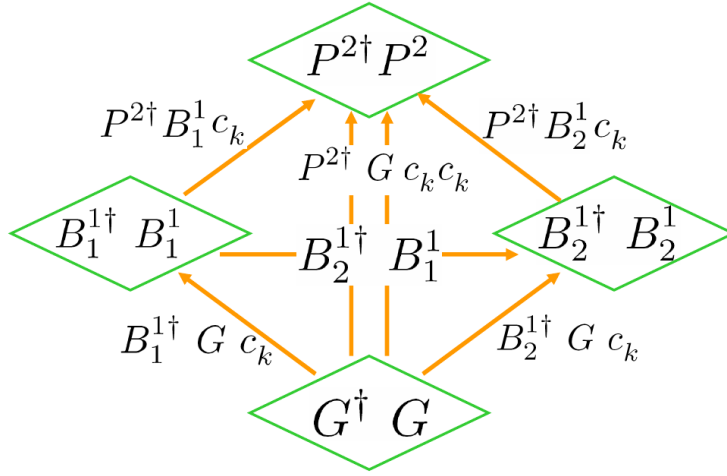


Abbildung 6.4: Pfade der nicht-lokalen Anregung zweier Coulomb-gekoppelter Quantenpunkte

nachzulesen.

Für die Grundzustandsdichte ergibt sich:

$$\partial_t \langle G^\dagger G \rangle = 2 \Gamma \left[\langle B_1^{1\dagger} B_1^1 \rangle + \langle B_2^{1\dagger} B_2^1 \rangle \right] - 2 \operatorname{Im} \left[\sum_m \bar{M}_{km} \langle G^\dagger B_m^1 c_k^\dagger \rangle \right]. \quad (6.3.19)$$

Der Dämpfungsterm, der von den Exzitondichten des Systems abhängt, stellt sicher, daß die Elektronenzahl eine Konstante im System ist, also

$$\begin{aligned} \langle G^\dagger G \rangle + \langle B_1^{1\dagger} B_1^1 \rangle + \langle B_2^{1\dagger} B_2^1 \rangle + \langle P^{2\dagger} P^2 \rangle &= 2 \\ \Rightarrow \partial_t \left[\langle G^\dagger G \rangle + \langle B_1^{1\dagger} B_1^1 \rangle + \langle B_2^{1\dagger} B_2^1 \rangle + \langle P^{2\dagger} P^2 \rangle \right] &= 0. \end{aligned} \quad (6.3.20)$$

gilt. Die Grundzustandsdichte wird wie im Fall eines isolierten Quantenpunktes allein durch die Photon- assistierte Polarisation getrieben. Ein Unterschied zum 1 Quantenpunkt-System ergibt sich erst bei den Exzitondichten:

$$\begin{aligned} \partial_t \langle B_m^{1\dagger} B_m^1 \rangle &= -2 \Gamma \left(\langle B_m^{1\dagger} B_m^1 \rangle - \langle P^{2\dagger} P^2 \rangle \right) \\ &+ 2 \operatorname{Im} \left[\bar{M}_{km,2}^* \langle P^{2\dagger} B_m^1 c_k \rangle + \bar{M}_{km} \langle G^\dagger B_m^1 c_k^\dagger \rangle \right]. \end{aligned} \quad (6.3.21)$$

Sie sind nicht nur an die Grundzustandsdichte gekoppelt, sondern auch an die Biexzitondichte. Ein Anstieg in der Grundzustandsdichte wie in der Biexzitondichte geht in die Exzitondichte negativ ein, zu sehen am gleichen Vorzeichen im Imaginärteil. Die Biexzitondichte hängt wiederum nur von der photon-assistierten Polarisation der 2. Stufe ab:

$$\partial_t \langle P^{2\dagger} P^2 \rangle = -4 \Gamma \langle P^{2\dagger} P^2 \rangle + 2 \operatorname{Im} \left[\sum_m \bar{M}_{km,2} \langle B_m^{1\dagger} P^2 c_k^\dagger \rangle \right]. \quad (6.3.22)$$

Für die Polarisationen gilt:

$$\begin{aligned}
\partial_t \langle G^\dagger B_m^1 c_k^\dagger \rangle &= -i [\omega_m^1 - \omega_R - i\Gamma] \langle G^\dagger B_m^1 c_k^\dagger \rangle \\
&- i \left[\bar{M}_{k1}^* \langle B_1^{\dagger 1} B_m^1 \rangle + \bar{M}_{k2}^* \langle B_2^{\dagger 1} B_m^1 \rangle - \bar{M}_{km,2} \langle G^\dagger P^2 c_k^\dagger c_k^\dagger \rangle \right] \\
&- i \sum_l \left[\bar{M}_{kl}^* \langle B_l^{\dagger 1} B_m^1 c_k^\dagger c_k \rangle - \bar{M}_{km}^* \langle G^\dagger G c_k^\dagger c_k \rangle \right].
\end{aligned} \tag{6.3.23}$$

Ein großer Unterschied zu den Bewegungsgleichungen des isolierten Quantenpunktes ist in Gleichung 6.3.23 der auftretende Exzitontransfer von einer Exzitondichte zur anderen (beispielsweise, wenn $m=1$ gewählt wird). Die Polarisation koppelt also nicht nur an Dichten, sondern enthält selbst oszillierende Größen. Exakt diese machen eine analytische Lösung, die von einem stationären Limit ausgeht und über Markov-Approximation die Polarisationen über die Dichten ausdrückt, schwierig. Insbesondere der Term, der eine Polarisation von Grundzustand zum Biexziton darstellt. In der Numerik wurden diese Terme ein- und ausgeschaltet, um den Einfluß abzuschätzen. Es hat sich gezeigt, daß sie nicht vernachlässigt werden können. Im stationären Limit würde dieser wie der Exzitontransfer kompliziert von allen anderen Dichten des Systems abhängen (bis zur 4.Ordnung im Lichtkopplungs-Element) und eine knappe und übersichtliche analytische Lösung verhindern.

$$\begin{aligned}
\partial_t \langle B_m^{\dagger 1} P^2 c_k^\dagger \rangle &= -i [\omega^2 - \omega_m^1 - \omega_k - 3i\Gamma] \langle B_m^{\dagger 1} P^2 c_k^\dagger \rangle - i \bar{M}_{km,2}^* \langle P^{2\dagger} P^2 \rangle \\
&+ i \left[\bar{M}_{k1,2}^* \langle B_m^{\dagger 1} B_1^1 c_k^\dagger c_k \rangle + \bar{M}_{k2,2}^* \langle B_m^{\dagger 1} B_2^1 c_k^\dagger c_k \rangle \right] \\
&- i \left[\bar{M}_{km,2}^* \langle P^{2\dagger} P^2 c_k^\dagger c_k \rangle + \bar{M}_{km} \langle G^\dagger P^2 c_k^\dagger c_k^\dagger \rangle \right]
\end{aligned} \tag{6.3.24}$$

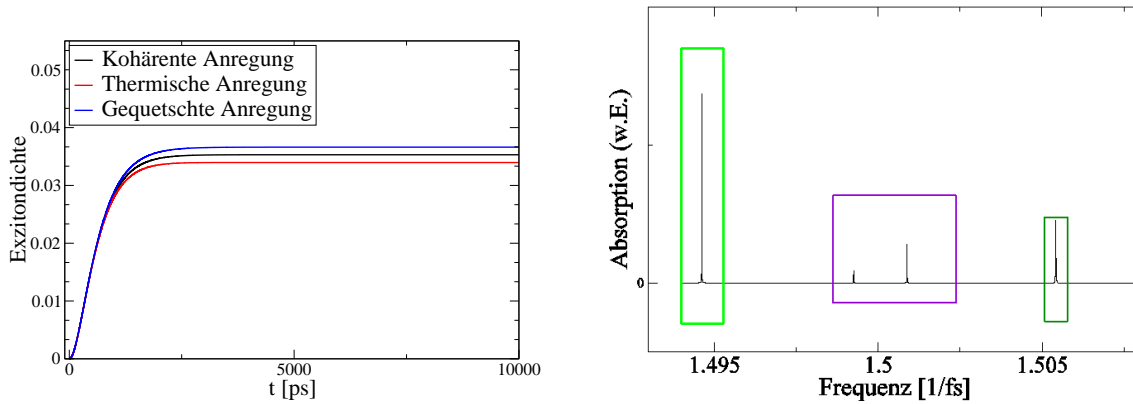
In Gleichung 6.3.24 treten ebenfalls neue Pfade auf, die die verschiedenen Dichten des Systems interessant verknüpfen. Wichtig ist hier im Vergleich zur Gleichung 6.3.23, daß die Photondichte-assistierten Exzitondichten $\langle B_m^{\dagger 1} B_m^1 c_k^\dagger c_k \rangle$ positiv in die Polarisation eingehen. Dieser Vorzeichenwechsel verändert den Einfluß von $g^{(2)}$. In Gleichung 6.3.24 ist ein hohes $g^{(2)}$ für die Erzeugung von Biexzitonen günstig. Der treibende Term wird verstärkt. In Gleichung 6.3.23 ist der Effekt gegenläufig. Das $g^{(2)}$ verstärkt das Gegenmoment zum treibenden Term (beschleunigt den Vorzeichenwechsel in der Inversion). Ist es klein, wirkt der treibende Term effektiver.¹⁹ Die für die numerische Lösung notwendigen weiteren Gleichungen sind im Appendix A.17 zu finden und ergeben ein geschlossenes Gleichungssystem.

Im Falle gekoppelter Quantenpunkte besetzt das anregende Lichtfeld drei Dichten. Die zwei Exzitondichten und die Biexzitondichte. Zuerst werden die numerischen Ergebnisse einzeln vorgestellt und dann verglichen. Materialparameter sind [DAFK06] und [Ahn06] entnommen. Für die Korrelationsfunktion $g^{(2)}$ des gequetschten Lichtes wurde 0.2 genommen.

6.3.2 Exzitondichten: Numerische Ergebnisse

In dem anzuregenden 4-Niveau-System gibt es zwei Exzitondichten. Im vorliegenden Schema wird die eine von den beiden Exzitondichten resonant angeregt und zwar jene, deren Dipolmoment in der nicht-lokalen Basis nicht vermindert wird. Die nicht-resonante Exzitondichte wird um mehrere Größenordnungen weniger stark besetzt, einerseits als typische Nicht-Resonanz-Folge, andererseits wegen eines beinahe verschwindenden Dipolmomentes. In Abbildung 6.5(b) sieht man das Absorptionsspektrum des gekoppelten Quantenpunktsystems für eine Photonenzahl von 5000, so daß die Gültigkeit gesichert ist. Hellgrün eingerahmt ist die resonant angeregte Exzitondichte mit verstärktem Dipolmoment. Violett eingerahmt und stark vergrößert sieht man den Absorptionspeak

¹⁹Im Falle eines isolierten Quantenpunktes kann eine erhöhte Photondichte-assistierte Leitungsbanddichte nur negativen Einfluß haben, da keine weitere Anregung im System möglich ist. Im Falle zweier gekoppelter Quantenpunkte gibt es jedoch weitere Pfade und die Photondichte-assistierte Leitungsbanddichte erhöht die Wahrscheinlichkeit der Biexzitondichte. Vergleiche Abschnitt 5.1.3.



(a) Dynamik der resonant angeregten Exzitondichte

(b) Spektrum: resonant angeregte Exzitondichte (hellgrün), nicht-resonant angeregte Exzitondichte (violett und stark vergrößert)

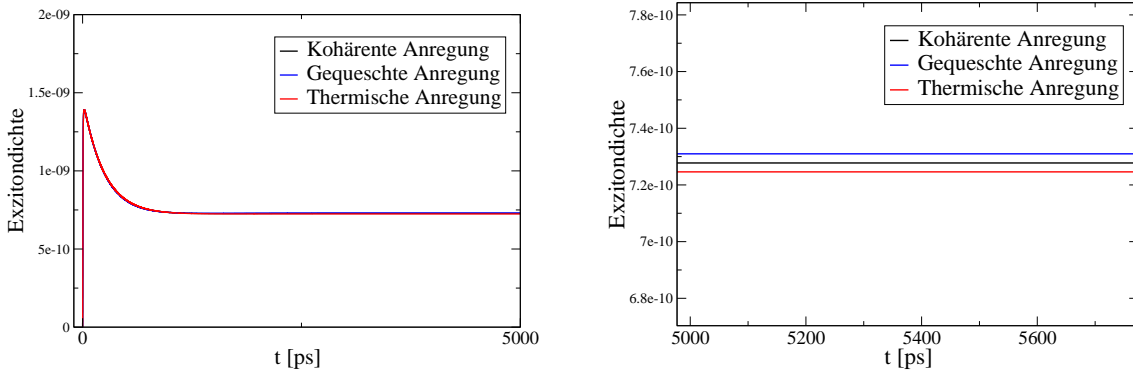
Abbildung 6.5: Exzitondichte zweier gekoppelter Quantenpunkte: Stationär und resonant angeregt mit einem kohärenten (schwarz), thermischen Lichtfeld (rot) und gequetschten Lichtfeld (blau) - numerische Ergebnisse

der nicht-resonanten Exzitondichte. Die Vergrößerung ist viele Größenordnung stark, woraus man folgern kann, daß die nicht-resonante Exzitondichte so gut wie nicht besetzt wird, es sei denn durch den Zerfall der Biexzitondichte, welche aus Gründen der Erhaltung der Elektronendichte den Exzitondichten gutgeschrieben wird (siehe Gleichung 6.3.21). Der Vollständigkeit halber sind auch die Absorptionen von der Exzitondichte zur Biexzitondichte eingezeichnet. Dunkelgrün eingerahmt ist der Übergang von der resonant-angeregten Exzitondichte zum Biexziton. Im violetten Rahmen wiederum jener von der nicht-resonanten Exzitondichte ausgehend.

In Abbildung 6.5(a) ist die Dynamik der resonant angeregten Exzitondichte geplottet. Die Photondichte nimmt stetig zu, bis sie einen stationären Wert erreicht, und treibt die Exzitondichte, bis diese so stark besetzt ist, daß die Dämpfung und die Anregung ein Gleichgewichtszustand erreichen und das System ins stationäre Limit übergeht, in welchem die Größen des System konstant bleiben. Man kann erkennen, daß die Photonstatistiken kaum einen Einfluß auf die Exzitonodynamik haben. Die Wahrscheinlichkeit ein Exziton zu messen, unterscheidet sich zwischen den verschiedenen Anregungsarten (rot=thermisch, schwarz=kohärent, blau=gequetschtes Licht mit Anti-Bunching) nur um wenige Prozent. Es reproduziert sich desweiteren das Ergebnis des isolierten Quantenpunktes, welcher im Vergleich zum thermischen Licht ebenfalls marginal effizienter durch gequetschtes oder kohärentes Licht angeregt wird.

Zur Illustration ist noch in Abbildung 6.6(a) die Dynamik der nicht-resonanten Exzitondichte geplottet. Mit dem einfallenden Lichtfeld steigt sie schnell auf ihren Maximalwert an, der um 5 Größenordnungen unterhalb des Maximalwertes der resonanten Exzitondichte liegt, um dann einen qualitativ anderen Verlauf als die resonante Exzitondichte zu nehmen: Sie fällt auf einen geringeren Wert ab. Dieses Abklingen erklärt sich durch den Exzitontransfer. Wird dieser ausgeschaltet, bleibt die nicht-resonante Exzitondichte ebenfalls konstant auf ihrem Maximalwert. Der Exzitontransfer sorgt in dieser Parameterwahl dafür, daß die Anregung entsprechend dem nicht-lokalen Dipolmoment hin zum höheren Dipolmoment verteilt wird.

Der Unterschied zwischen den verschiedenen Anregungsarten ist in Abbildung 6.6(a) nicht zu sehen. Sie liegen zu eng beieinander. In Abbildung 6.6(b) ist ein Ausschnitt vergrößert und zwar zu einem Zeitpunkt, in dem das System schon das stationäre Limit erreicht hat. Die Farbwahl ist dieselbe wie in Abbildung 6.5(a) und die quantitative Abfolge ebenfalls. Auch die nicht-resonante Exziton-



(a) Dynamik der nicht-resonant angeregten Exzitondichte

(b) Dynamik der nicht-resonant angeregten Exzitondichte (Zoom)

Abbildung 6.6: Exzitondichte zweier gekoppelter Quantenpunkte: Stationär und nicht-resonant angeregt mit einem kohärenten (schwarz), thermischen Lichtfeld (rot) und gequetschten Lichtfeld (blau) - numerische Ergebnisse

dichte wird marginal besser getrieben durch kohärentes und gequetschtes Licht. Der Unterschied ist jedoch noch viel geringer. Dies ist notwendigerweise der Fall, da die Wichtigkeit der 4. Ordnung im Kopplungselement umso mehr abnimmt, wie der Puls an Stärke verliert. Die Pulsstärke ist jedoch ein Produkt aus der Lichtkopplung und der Photonenzahl, da im nicht-resonanten Fall die Lichtkopplung, die proportional zum Dipolmoment ist, sehr klein ist, ist auch die Pulsstärke klein und die Korrektur aus der 4. Ordnung demzufolge vernachlässigbar.

6.3.3 Exzitondichten für verschiedene Anregungsstärken

Um die Unterschiede zwischen den verschiedenen Anregungsmöglichkeiten herauszuarbeiten, wird in diesem Abschnitt die im stationären Limit erreichte Exzitondichte als Funktion der Anregungsstärke aufgetragen. Es ist zu erwarten, daß sich mit steigender Anregungsstärke die erreichten Maximalwerte der Exzitondichten je nach Lichtstatistik des anregenden Feldes stark unterscheiden. Der Unterschied begründet sich in dem unterschiedlichen Wert der Korrelationsfunktion für die Intensität, also als Effekt der 4. Ordnung im Lichtkopplungselement. Je höher die Feldstärke des einfallenden Feldes, desto gravierender sind die Unterschiede. In Abbildung 6.7(a) ist die Exzitondichte in Abhängigkeit von der Photonenzahl aufgetragen, unterschieden für die verschiedenen Lichtstatistiken (rot = thermisch, schwarz = kohärent, blau = gequetscht). Man sieht eindeutig, wie sich mit zunehmender Photonenzahl die erreichten Maximalwerte der Exzitondichte unterscheiden. Dies entspricht der Erwartung. Auch hier erreicht das thermische Licht stets einen geringeren Wert in der Exzitondichte als kohärentes und gequetschtes Licht.

In Abbildung 6.7(b) ist der Unterschied systematisiert. Hier ist die Differenz der Exzitondichte zur jeweilig von der kohärenten Anregung erzeugten Exzitondichte aufgetragen, also die Abweichung abzulesen, mit der gequetschtes Licht und thermisches Licht anregt. Im Vergleich zum thermischen Licht regt kohärentes Licht effektiver an. Die Differenz ist positiv (rot) und wächst an. Dagegen regt gequetschtes Licht die Exzitondichte effektiver als das kohärente Licht an. Die Differenz ist negativ (blau) und steigt ebenfalls mit zunehmender Photonenzahl.

Um die Abweichung in der Exzitondichte nachher mit jener in der Biexzitondichte vergleichen

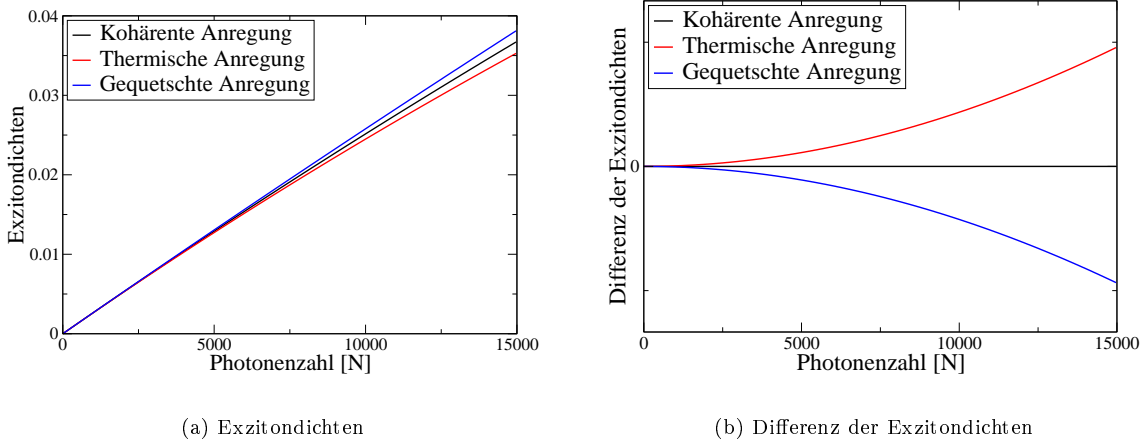


Abbildung 6.7: Exzitondichte zweier gekoppelter Quantenpunkte in Abhängigkeit von der Anregungsstärke (Photonzahl des stationär eingestrahlten Lichtfeldes): Stationär und resonant angeregt mit einem kohärenten (schwarz), thermischen Lichtfeld (rot) und gequetschten Lichtfeld (blau) - numerische Ergebnisse

zu können, wird noch die prozentuale Abweichung zum kohärenten Anregungsschema über die Photonenzahl aufgetragen.

$$\Delta \langle B_m^{1\dagger} B_m^1 \rangle = \frac{\langle B_m^{1\dagger} B_m^1 \rangle_{koh} - \langle B_m^{1\dagger} B_m^1 \rangle_{therm}}{\langle B_m^{1\dagger} B_m^1 \rangle_{koh}} \cdot 100. \quad (6.3.25)$$

In Abbildung 6.8 ist ein linearer Zusammenhang zu erkennen. Die prozentuale Abweichung steigt

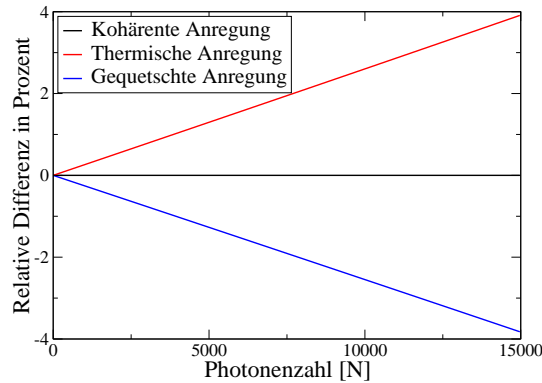


Abbildung 6.8: Exzitondichte zweier gekoppelter Quantenpunkte: $\Delta \langle B_m^{1\dagger} B_m^1 \rangle$ - normierte Differenz als Funktion der Anregungsstärke (Photonzahl des stationär eingestrahlten Lichtfeldes)

für thermisches Licht, wie auch für gequetschtes Licht (die Abweichung hier im Betrag genommen). Die Abweichung beträgt jedoch weniger als 5 % und diesen Wert erreicht die Abweichung auch erst bei einer sehr hohen Photonenzahl. Sie liegt in jedem Fall im Prozentbereich. Wie im Falle eines isolierten Systems ist es für die Erzeugung von Exzitonen günstig, wenn das Licht geordnet in einzelnen Paketen mit dem elektronischen System wechselwirkt, indes Bunching, also geklumpertes Licht, günstig für Zwei-Photon-Absorption ist und somit die Biexzitonen-Erzeugung begünstigt, die im nächsten Abschnitt diskutiert wird.

6.3.4 Biexzitondichte: Numerische Ergebnisse

Eine neue Größe, die bei gekoppelten Quantenpunkten zu untersuchen möglich wird, ist die Biexzitondichte, also lokal gesprochen die Wahrscheinlichkeit beide Elektronen im Leitungsband zu finden. Das Bild entspricht nicht ganz der Situation in dem 4-Niveau-System wegen des Einflusses der verschiedenen Shift- und Kopplungserscheinungen, also wegen seines delokalisierten Charakters. Jedoch ist die biexzitonische Polarisation (Gleichung 6.1.5) sowohl Eigenvektor in der lokalen wie in der nicht-lokalen Basis, solange es sich nur um zwei gekoppelte Quantenpunkte handelt und somit ist das Bild zutreffend. Die Biexzitondichte mißt also die Wahrscheinlichkeit, beide Elektronen im angeregten Zustand zu finden. In Abbildung 6.9 ist die Dynamik der Biexzitondichte

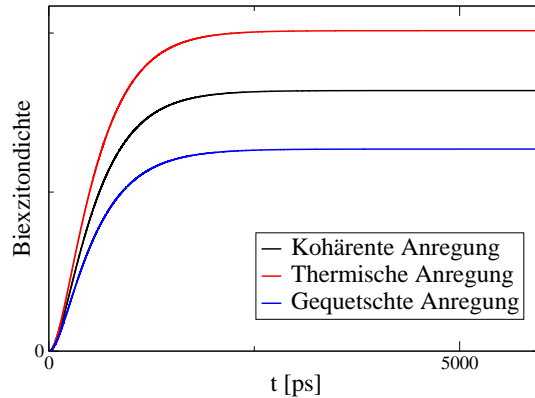


Abbildung 6.9: Biexzitondichte zweier gekoppelter Quantenpunkte: Stationär angeregt mit einem kohärenten (schwarz), thermischen Lichtfeld (rot) und gequetschten Lichtfeld (blau) - numerische Ergebnisse

unter verschiedenen Anregungsarten geplottet (thermisch = rot, kohärent = schwarz, gequetscht = blau). Die Biexzitondichte steigt zusammen mit dem langsam seinen Maximalwert anstrebenenden Lichtfeld, bis das System den Gleichgewichtszustand erreicht und die Größen sich nicht mehr ändern (ab etwa 3ns). Man erkennt einen deutlichen Unterschied zwischen den Anregungsarten. Das thermische Licht ist hier im Gegensatz zu den Exzitondichten am effektivsten. Gequetschtes Licht hingegen erreicht nur etwa die Hälfte des Maximalwertes der Biexzitondichte des thermischen Lichtfeldes. Die Reihenfolge hat sich also umgedreht. Die resultiert direkt aus dem veränderten Vorzeichen, mit welchem in die Biexzitondichte die Photondichte-assistierte Exzitondichte eingeht. In der Erzeugung von Biexzitonen ist ein erhöhtes $g^{(2)}$ günstig.

6.3.5 Biexzitondichten für verschiedene Anregungsstärken

Wie im Falle der Exzitondichte werden nun die jeweils im stationären Limit erreichten angenommenen Werte der Biexzitondichten für verschiedene Anregungsstärken geplottet und so der Einfluß von $g^{(2)}$ für den Anregungsprozeß untersucht. Einerseits wird geprüft, daß mit zunehmender Photonenzahl (bei gleichbleibender Lichtkopplung) die Differenz zwischen den Biexzitondichten steigt, andererseits in welcher Relation die Differenzen zur erreichten Wahrscheinlichkeit, ein Biexziton zu finden, stehen. Der Vergleich arbeitet den Unterschied, den $g^{(2)}$ auf die Erzeugung von Biexzitonen hat, stärker heraus.

In Abbildung 6.10(a) sind die erreichten Biexzitondichten über die Photonenzahl geplottet. Mit steigender Anregungsstärke wächst diese quadratisch an. Je stärker also das Lichtfeld ist, desto höher ist die Wahrscheinlichkeit, zwei Elektronen ins Leitungsband zu heben. Dies entspricht dem zu erwartenden Verhalten. In Abbildung 6.10(a) sieht man auch, wie mit zunehmender Photonenzahl der Einfluß von $g^{(2)}$ wächst. Die Parabeln klaffen immer weiter auseinander (thermisch = rot, kohärent = schwarz, gequetscht = blau). In Abbildung 6.10(b) ist der Absolutwert der Differenz

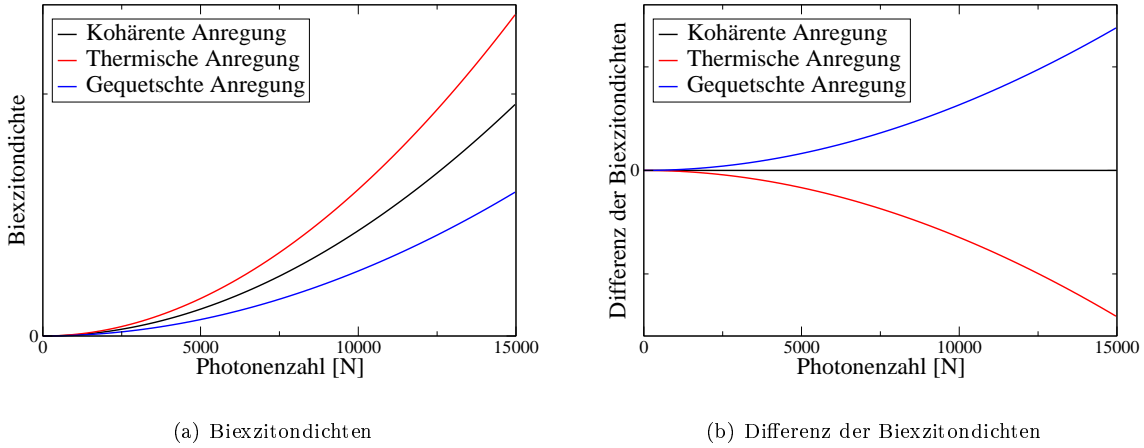


Abbildung 6.10: Biexzitondichte zweier gekoppelter Quantenpunkte in Abhängigkeit von der Anregungsstärke (Photonzahl des stationär eingestrahnten Lichtfeldes): Stationär angeregt mit einem kohärenten (schwarz), thermischen Lichtfeld (rot) und gequetschten Lichtfeld (blau) - numerische Ergebnisse

aufgetragen, die sich zwischen kohärenter Anregung und thermischer, bzw. gequetschter Anregung ergibt. Rot ist die Differenz zwischen kohärenter und thermischer Anregung. Sie ist negativ, da thermisch Biexzitonen effektiver angeregt werden können, und nimmt mit steigender Photonzahl quadratisch zu. In Blau ist die Differenz zwischen kohärenter und gequetschter Anregung geplottet. Sie ist positiv, da gequetschtes Licht einen noch geringeren Wert für $g^{(2)}$ hat als kohärentes Licht, und nimmt ebenfalls quadratisch zu. Die Symmetrie ergibt sich aus der Tatsache, daß es sich stets um quadratische und biquadratische Gleichungen handelt, und für das gequetschte Licht eine extrem-sub-poissonsche Verteilung angenommen wurde ($g^{(2)} = 0.02$).

In Abbildung 6.11 ist nun die relative Abweichung geplottet, die sich zwischen kohärenter und

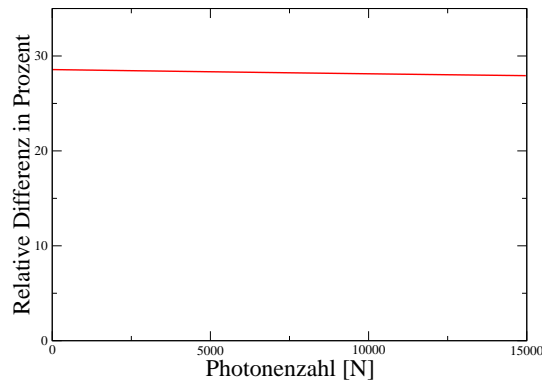


Abbildung 6.11: Exzitondichte zweier gekoppelter Quantenpunkte: $\Delta_{therm} \langle P^{2\dagger} P^2 \rangle$ - normierte Differenz als Funktion der Anregungsstärke (Photonzahl des stationär eingestrahnten Lichtfeldes)

thermischer Anregung bei der Erzeugung von Biexzitonen ergibt. Hier ist die Differenz im Betrag

genommen und durch den Wert der Biexzitondichte geteilt, die sich bei thermischer Anregung ergibt:

$$\Delta\langle P^{2\dagger}P^2 \rangle = \frac{\langle P^{2\dagger}P^2 \rangle_{therm} - \langle P^{2\dagger}P^2 \rangle_{koh}}{\langle P^{2\dagger}P^2 \rangle_{therm}} \cdot 100. \quad (6.3.26)$$

Die relative Differenz zeigt eindeutig, daß für die Anregung von Biexzitonen in gekoppelten Quantenpunkten die Photonstatistik des anregenden Lichtfeldes nicht zu vernachlässigen ist. Die relative Abweichung beträgt beinahe 30 % und ist relativ unabhängig von der Stärke des anregenden Lichtfeldes.²⁰ Mit zunehmender Photonenzahl verringert sich die Relativabweichung ein wenig. Dies liegt in der Tatsache begründet, daß die Biexzitondichte schneller steigt als die Differenz, ist also nicht unphysikalisch, da der Absolutwert der Differenz ebenfalls mit steigender Photonenzahl ansteigt. Die Dynamik der Biexzitonen reagiert empfindlich auf Veränderung in der Lichtstatistik des anregenden Feldes.

Der Vollständigkeit halber ist in Abbildung 6.12 noch die relative Differenz der gequetschten Anre-

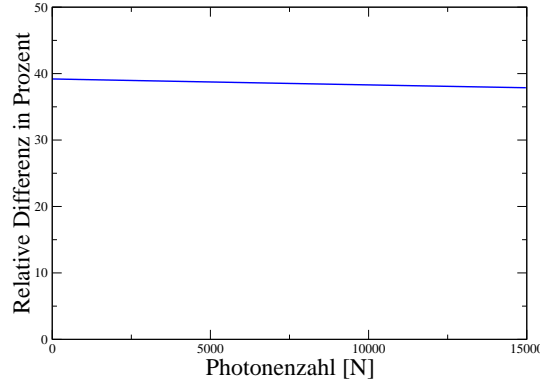


Abbildung 6.12: Exzitondichte zweier gekoppelter Quantenpunkte: $\Delta_{squeezed}\langle P^{2\dagger}P^2 \rangle$ - normierte Differenz als Funktion der Anregungsstärke (Photonzahl des stationär eingestrahnten Lichtfeldes)

gung zur kohärenten Anregung geplottet. Die Abweichung beträgt etwa 40%. Die Biexzitondichte durch gequetschte Anregung erreicht also etwa 60% derjenigen, die durch kohärente Anregung erzeugt wird.

6.3.6 Differential-Transmission-Signal: Biexziton-Exziton

Eine Möglichkeit, Exziton- und Biexzitondichten in einem Quantenpunkt-Paar zu messen, besteht darin, daß Differential Transmission-Signal experimentell zu bestimmen. Zu diesem Zweck wird die Absorption des unangeregten System (Nulldurchgang $T_0(\omega)$) für verschiedene Frequenzen gemessen. Dies geschieht mit einem schwachen, im linearen Regime gehaltenen, Probe-Pulse. Die Pulsstärke ist so schwach, daß Exziton- oder Biexzitondichten sich nicht aufbauen können. Auch die quantenoptischen Eigenschaften des Probe-Pulses spielen in diesem Schema keine Rolle. Die Absorptionen im Frequenzraum ist nun gegeben durch:

$$\alpha(\omega) = \text{Im} \left[\frac{P(\omega)}{\Omega_p} \right], \quad (6.3.27)$$

wobei $P(\omega)$ die Polarisation und Ω_p die Pulsstärke des Probe-Pulses ist. In dem 4-Niveau-System gibt es 4 Übergänge, deren Absorption gemessen werden können. Zwei Grundzustand-Exziton-

²⁰Es ist noch zu bemerken, daß für diesen Plot der Anfangswert der Photonenzahl 1 betrug, um Singularitäten zu vermeiden, die sich aus der Berechnung der Relativabweichung ergäbe, wenn die Biexzitondichte Null beträgt.

Übergänge und zwei Exziton-Biexziton-Übergänge. Im linearen Regime gelten folgende Bewegungsgleichungen, geschrieben im Rotating-Frame der Probe-Frequenz:

$$\partial_t \langle G^\dagger B_n^1 \rangle = -i(\omega_n^1 - \omega_p - i\Gamma) \langle G^\dagger B_n^1 \rangle - i\Omega_p [\langle B_n^{1\dagger} B_n^1 \rangle - \langle G^\dagger G \rangle] \quad (6.3.28)$$

$$\partial_t \langle B_n^{1\dagger} P^2 \rangle = -i(\omega^2 - \omega_n^1 - \omega_p - 3i\Gamma) \langle B_n^{1\dagger} P^2 \rangle - i\Omega_p [\langle P^{2\dagger} P^2 \rangle - \langle B_n^{1\dagger} B_n^1 \rangle]. \quad (6.3.29)$$

Im stationären Limit kann die Gesamt-Polarisation berechnet werden. Der Imaginärteil ergibt:

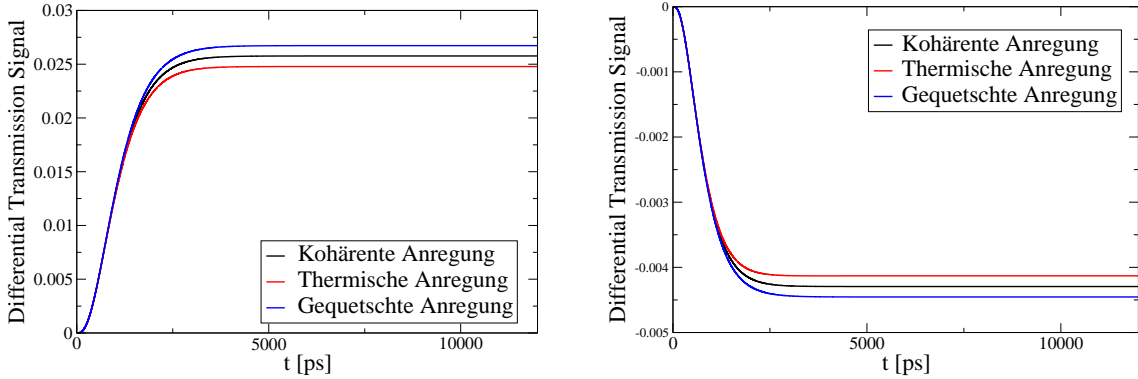
$$\begin{aligned} \text{Im} \left[\frac{P(\omega_p)}{\Omega_p} \right] &= \text{Im} \left[\langle G^\dagger B_1^1 \rangle + \langle G^\dagger B_2^1 \rangle + \langle B_1^{1\dagger} P^2 \rangle + \langle B_2^{1\dagger} P^2 \rangle \right] \\ &= \Gamma \frac{[\langle B_1^{1\dagger} B_1^1 \rangle - \langle G^\dagger G \rangle]}{(\omega_1^1 - \omega_p)^2 + \Gamma^2} + \Gamma \frac{[\langle B_2^{1\dagger} B_2^1 \rangle - \langle G^\dagger G \rangle]}{(\omega_2^1 - \omega_p)^2 + \Gamma^2} \\ &\quad + 3\Gamma \frac{[\langle P^{2\dagger} P^2 \rangle - \langle B_1^{1\dagger} B_1^1 \rangle]}{(\omega^2 - \omega_1^1 - \omega_p)^2 + 9\Gamma^2} + 3\Gamma \frac{[\langle P^{2\dagger} P^2 \rangle - \langle B_2^{1\dagger} B_2^1 \rangle]}{(\omega^2 - \omega_2^1 - \omega_p)^2 + 9\Gamma^2}. \end{aligned} \quad (6.3.30)$$

Wenn der Nulldurchgang $T_0(\omega)$ gemessen wurde (Exziton- und Biexzitondichte sind nicht populiert), wird das Pump-Feld eingeschaltet. Sobald sich das System in seinem Gleichgewichtszustand befindet, wird das Probe-Feld wieder auf die verschiedenen Resonanzfrequenzen des Systems gesetzt und die Absorption ein weiteres Mal gemessen $T(\omega)$. Das Differential-Transmission-Signal ist nun die auf den Nulldurchgang normierte Differenz:

$$\delta T(\omega) = \frac{T(\omega) - T_0(\omega)}{T_0(\omega)}. \quad (6.3.31)$$

Wegen des nicht-lokalen Dipolmoments und der daraus resultierenden sehr schwachen Lichtkoppelung der nicht-resonanten Exzitondichte, müssen nur zwei Übergänge berücksichtigt werden²¹.

In Abbildung 6.13(a) und 6.13(b) ist das DTS über der Zeit aufgetragen. Man sieht wieder, daß



(a) DTS des Überganges vom Grundzustand zum Exziton (resonant)

(b) DTS des Überganges vom Exziton zum Biexziton

Abbildung 6.13: DTS zweier gekoppelter Quantenpunkte: Stationär und resonant angeregt mit einem kohärenten (schwarz), thermischen Lichtfeld (rot) und gequetschten Lichtfeld (blau) - numerische Ergebnisse

das System das stationäre Limit erreicht. Das DTS in Resonanz auf den mit dem Pump-Feld

²¹Siehe hierzu die Resonanzpeaks in Abbildung 6.5(b).

resonanten Übergang Grundzustand-Exziton gestellt (Abbildung 6.13(a)) skaliert mit der Exzitonendichte. Das DTS reproduziert die Abbildung 6.5(a) und zeigt nur relativ geringe Unterschiede zwischen den Anregungsformen. In Abbildung 6.13(b) ist das DTS in Resonanz auf den Exziton-Biexziton-Übergang gestellt. Das DTS kann nicht direkt die Biexzitonendichte abbilden, sondern zeichnet lediglich die Differenz zwischen Biexzitonendichte und Exzitonendichte auf, die negativ ist. Exzitonendichte sind Erwartungswerte in der 2. Ordnung Lichtkopplungs-Element, Biexziton der 4. Ordnung und daher schwächer populiert. Dennoch erkennt man den gegenläufigen Effekt der Lichtstatistik in Abbildung 6.13(b). Die Differenz zwischen Biexziton- und Exzitonendichte ist unter thermischer Anregung weniger negativ als die der anderen, woraus folgt, daß die Biexzitonendichte größer und die Exzitonendichte geringer sein muß als im Falle kohärenter und gequetschter Anregung. Leider dominiert die in Abbildung 6.13(a) aufgezeichnete Tatsache, daß die Exzitonendichte unter thermischer Anregung geringer ist. Die Unterschiede in der Biexzitonendichte werden in der Summation verschmiert und können in diesem Schema nicht direkt abgefragt werden.

7 Zusammenfassung

Die in dieser Arbeit vorgestellte Theorie quantisierter Anregung in gekoppelten Nanostrukturen zeigt im Rahmen der gemachten Näherungen (Bornsche Näherung und Korrelationsentwicklung) eindrücklich, daß die Photon-Statistik des anregenden Lichtfeldes einen deutlich (meßbaren) Einfluß auf die Dynamik der Leitungsbanddichte in isolierten Quantenpunkten (Kapitel 5) wie auf die Dynamik der Exziton- und Biexzitondichten (Kapitel 6) hat. Dies bereits im hier untersuchten stationären Limit, in welchem eine stationäre Anregung zu einem Gleichgewichtszustand zwischen Dämpfung und Besetzungsdichte im Leitungsband führt, jedoch nur für nicht-lineare Anregung, da erst für das Intensitätsquadrat die Photonstatistik Abweichungen zwischen den Lichtquellen hervortreten läßt. Sind die Unterschiede zwischen den Anregungsformen bei einem isolierten Quantenpunkt noch klein (ca. 3%) und die im Kapitel 5 präsentierten Ergebnisse gegen die aus dem Jaynes-Cummings-Modell (Kapitel 4) folgenden zeitlich begrenzter, so zeigt Kapitel 6 eine wirkliche Erweiterung des Jaynes-Cummings-Modells, wenn die Anregung gekoppelter Nanostrukturen (hier zwei Coulomb-gekoppelte Quantenpunkte) untersucht wird. Die Unterschiede zwischen den Anregungsformen bleibt für Exzitondichte im Prozentbereich, für die Biexzitondichte jedoch zeigen sich markante Unterschiede (ca. 35%). Eine Vernachlässigung der Photon-Statistik führt also in der Berechnung der Biexzitondichte zu großen Fehlern. Bei den präsentierten Ergebnissen der Numerik sind die Voraussetzungen für eine stationäre Lösung eingehalten und überprüft worden. Die Lichtfeldintensität wurde so gewählt, daß die Dämpfung wie die Lichtkopplung im Zusammenspiel ein stabiles, stationäres Ergebnis ermöglicht.

Leider verbleiben die Rechnungen in niedrigen Ordnungen des Lichtkopplungs-Elementes und lassen somit keine hohen Pulsflächen zu, die zur Grundlage für beispielsweise Photon-Statistik abhängige Rabi-Oszillation dienen könnten. Im Rahmen des hier vorgestellten Modells ergeben sich bei zu hohen Intensitäten negative Dichten, die den Zusammenbruch der Modellgültigkeit markieren. Das hier vorgestellte Modell läßt jedoch den Ausblick zu, anhand einer dem Jaynes-Cummings-Modell ähnlichen analytischen Lösung des gekoppelten Quantenpunkt-Systems die Rabi-Oszillation als Superposition von Nummernzuständen zu berechnen, auch für Exzitonen.

Desweiteren können die im Kapitel aufgestellten Verfahren als erste Schritte verstanden werden, um beispielsweise den Exzitontransfer innerhalb von Lichtsammelkomplexen zu untersuchen. Chlorophylle wechselwirken mit dem thermischen Licht der Sonne, so daß quantenoptische Beiträge einen relevanten Forschungsgegenstand darstellen, Anregungen von Exzitonen und Biexzitonen gründlicher zu verstehen. Die vorliegende Arbeit legt die Vermutung nahe, daß thermische Anregung für gekoppelte Systeme eine effizientere Anregungsart darstellt, und die Betrachtung von quantenoptischen Effekten auch für das Verständnis von nichtlinearen Lösungsprozessen bei Hochanregung in der Photosynthese zukünftig viel beitragen kann.

8 Danksagung

Ich danke vor allem Prof. Andreas Knorr und Marten Richter für die vorzügliche und ermunternde Betreuung, die nicht besser hätte sein können und ohne die diese Arbeit gar nicht möglich gewesen wäre. Mein Dank gilt desweiteren an Prof. Tobias Brandes, der sich bereit erklärt hat, das Zweitgutachten für diese Arbeit zu erstellen, wie Sören Georg und Frank Milde, die mir bei der Erstellung dieser Arbeit mit Rat und Tat zur Seite gestanden haben. Für die offene und fröhliche Atmosphäre danke ich der AG Knorr insgesamt, insbesondere Jeong-Eun Kim, for being such a nice roommate and sharing your coffee with me.

Zuletzt möchte ich meinen Eltern danken, daß sie es mir ermöglicht haben, Physik zu studieren, sowie meiner Freundin Julia Kabuß für ihre unermüdliche Unterstützung und dafür, daß das Leben mit ihr so wunderbar ist.

A Appendix

A.1 Transformation der Lagrangefunktion

Man startet mit folgender Lagrangefunktion:

$$L = \sum_n \frac{m}{2} \dot{\underline{r}}_n^2 - \sum_n q\phi(\underline{r}_n) + V_G(\underline{r}_n) + U_{D_n}(\underline{r}_n) + \frac{1}{2} \int d^3r \left[\epsilon_0 \epsilon_m \underline{E}^2(\underline{r}, t) - \frac{1}{\mu_0} \underline{B}^2(\underline{r}, t) \right] + \sum_n q \dot{\underline{r}}_n \cdot \underline{A}(\underline{r}_n). \quad (\text{A.1.1})$$

Für die Felder gelten nach den Maxwell-Gleichungen:

$$\underline{B}(\underline{r}, t) = \nabla \times \underline{A}(\underline{r}, t) \quad (\text{A.1.2})$$

$$\underline{E}(\underline{r}, t) = -\nabla\phi(\underline{r}) - \partial_t \underline{A}(\underline{r}, t). \quad (\text{A.1.3})$$

In der Coulomb-Eichung $\nabla \cdot \underline{A}(\underline{r}, t) = 0$ folgt mit partieller Integration und der Voraussetzung, daß die Potentiale im Unendlichen verschwinden

$$\int d^3r \nabla\phi(\underline{r})\partial_t \underline{A}(\underline{r}, t) = - \int d^3r \phi(\underline{r})\partial_t \nabla \cdot \underline{A}(\underline{r}, t) = 0, \quad (\text{A.1.4})$$

für die Lagrangefunktion:

$$L = \sum_n \frac{m}{2} \dot{\underline{r}}_n^2 - \frac{q}{2} \phi(\underline{r}_n) + V_G(\underline{r}_n) + U_{D_n}(\underline{r}_n) + \frac{1}{2} \int d^3r \left(\epsilon_0 \epsilon_m [\partial_t \underline{A}(\underline{r}, t)]^2 - \frac{1}{\mu_0} [\nabla \times \underline{A}(\underline{r}, t)]^2 \right) + \sum_n q \dot{\underline{r}}_n \cdot \underline{A}(\underline{r}_n), \quad (\text{A.1.5})$$

wobei in der gewählten Eichung und für Punktladungen gilt:

$$\Delta\phi(\underline{r}) = \frac{\rho(\underline{r})}{\epsilon_0 \epsilon_m} = \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_m} \sum_n \delta(\underline{r}_n - \underline{r}) \quad (\text{A.1.6})$$

$$\int d^3r [\nabla\phi(\underline{r})]^2 = - \int d^3r \phi(\underline{r}) \Delta\phi(\underline{r}) = \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_m} \sum_n \phi(\underline{r}_n). \quad (\text{A.1.7})$$

Die Licht-Materie-Wechselwirkung kann einerseits in der $\underline{p} \cdot \underline{A}$ -Kopplung, andererseits in der $\underline{E} \cdot \underline{r}$ -Kopplung beschrieben werden. In dieser Arbeit wird die $\underline{E} \cdot \underline{r}$ -Kopplung gewählt. Um diese Wechselwirkung herzuleiten, gibt es mehrere Möglichkeiten. Man kann die Eichfreiheit der Schrödinger-Gleichung nutzen oder den Hamilton-Operator von einer Formulierung durch eine unitäre Transformation (Power-Zienau-Woolley-Transformation) in die andere überführen. Hier wird die Eichfreiheit der Lagrangefunktion ausgenutzt, um die gewünschte Kopplung bereits vor der Zweiten Quantisierung herzuleiten:

$$L' \rightarrow L + L_0$$

$$L_0 = \frac{d}{dt} \mathcal{F}(\underline{r}, t).$$

Jede Funktion, die nur stetig-differenzierbar von der Zeit und dem Ort abhängt, kann hierfür gewählt werden. Geeignet ist:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{F}(\underline{r}, t) &= q \frac{d}{dt} \underline{A}(\underline{r}, t) \cdot \underline{r} \\ &= q \partial_t \underline{A}(\underline{r}, t) \cdot \underline{r} + q \underline{A}(\underline{r}, t) \cdot \dot{\underline{r}} + q \underbrace{[\nabla_r \underline{A}(\underline{r}, t)]}_{=0} \cdot \dot{\underline{r}} \cdot \underline{r}. \end{aligned}$$

Nach Durchführung der Dipol-Approximation hängt das Vektorpotential nur noch vom Aufsatzzpunkt r_n des Quantenpunktes n und nicht mehr vom kontinuierlichen Ortsvektor r ab. Der dritte Term fällt weg. Die Lagrangedichte erhält mit $\dot{\underline{r}} = \frac{\underline{p}}{m} = \frac{1}{m} \frac{\hbar}{i} \nabla$ nun die gewünschte Form:

$$\begin{aligned} L' &= L - L_0 \\ &= \sum_n \frac{m}{2} \dot{\underline{r}}_n^2 - \frac{1}{2} q \phi(\underline{r}_n) + V_G(\underline{r}_n) + U_{D_n}(\underline{r}_n) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int d^3 r \left(\epsilon_0 \epsilon_m [\partial_t \underline{A}(\underline{r}_n, t)]^2 - \frac{1}{\mu_0} [\nabla \times \underline{A}(\underline{r}_n, t)]^2 \right) - \int d^3 r P^\perp(\underline{r}) \cdot \partial_t \underline{A}(\underline{r}_n, t) \end{aligned} \quad (\text{A.1.8})$$

mit dem Polarisationsoperator

$$P^\perp(\underline{r}) = \sum_n q \underline{r}_{0n} \delta(\underline{r} - \underline{r}_{0n}). \quad (\text{A.1.9})$$

A.2 Quantisierung von H_e : Effektive Masse

Im ersten Schritt wird der Ansatz eingesetzt und mit $\phi_{im,k'}^*(\underline{r})$ multipliziert, sowie über das Festkörper-Volumen integriert:

$$\begin{aligned} \sum_k b_k \int_V d^3 r \phi_{im,k'}^*(\underline{r}) \left\{ \frac{p^2}{2m} + V_G(\underline{r}) + U_{D_m}(\underline{r}) \right\} \phi_{im,k}(\underline{r}) \\ = \sum_k b_k E_{im} \int_V d^3 r \phi_{im,k'}^*(\underline{r}) \phi_{im,k}(\underline{r}). \end{aligned}$$

Mit 2.3.16, 2.3.18, Integration über die Elementarzellen j

$$\frac{1}{V} \int_V d^3 r \rightarrow \frac{1}{N} \sum_j \int_{VEZ_j} d^3 r \quad (\text{A.2.10})$$

und

$$U_{kk'} = \frac{1}{N} \sum_j \int_{VEZ_j} d^3 r e^{-i\mathbf{k}' \cdot \underline{r}} u_{im,k'}^*(\underline{r}) U_{D_m}(\underline{r}) e^{i\mathbf{k} \cdot \underline{r}} u_{im,k}(\underline{r})$$

folgt

$$b_{k'} \tilde{E}_{im,k'} + \sum_k b_k U_{kk'} = b_{k'} E_{im}. \quad (\text{A.2.11})$$

Um A.2.11 weiter auszuwerten, muß die Eigenschaft des Einschlußpotentials ausgenutzt werden, daß dieses nur schwach innerhalb einer Elementarzelle variiert. Das Potential kann also aus dem Integral gezogen werden:

$$\int_V d^3r U_{D_m}(\underline{r}) = \sum_j U_{D_m}(\underline{R}_j). \quad (\text{A.2.12})$$

Nun soll die Näherung gemacht werden, daß nur Impulse stark lokalisiert um Null betrachtet werden, d.h. $k \approx 0$. Mit der Unschärferelation $\Delta k \Delta x \geq \frac{1}{2}$ folgt hieraus, daß die ebenen Wellen in Abhängigkeit vom Ort stark delokalisiert sind, also ebenfalls aus dem Integral über die Elementarzelle gezogen werden können.

$$\begin{aligned} U_{kk'} &\approx \frac{1}{N} \sum_j U_{D_m}(\underline{R}_j) e^{-i(\underline{k}' - \underline{k}) \cdot \underline{R}_j} \underbrace{\int_{V_{EZ_j}} d^3r u_{im,k' \approx 0}^*(\underline{r}) u_{im,k \approx 0}(\underline{r})}_{\approx 1} \\ &\approx \frac{1}{N} \sum_j U_{D_m}(\underline{R}_j) e^{-i(\underline{k}' - \underline{k}) \cdot \underline{R}_j}. \end{aligned}$$

Im nächsten Schritt wird wieder angenommen, daß die Summe über die Elementarzellen in Bezug auf die Ausdehnung des Festkörpers wieder als ein Integral interpretiert werden kann, so daß letztlich

$$U_{kk'} \approx U_{D_m}(\underline{r}) \delta_{kk'} \quad (\text{A.2.13})$$

geschrieben werden kann. Das Ergebnis wird nun in A.2.11 eingesetzt und man erhält:

$$b_{k'} \tilde{E}_{im,k'} + b_{k'} U_{D_m}(\underline{r}) = b_{k'} E_{im}. \quad (\text{A.2.14})$$

A.3 Quantisierung von H_{e-e} : Taylor-Entwicklung

Die Coulombwechselwirkung kann in einem Festkörper auf verschiedene Arten auftreten und daher auch unterschiedlich berücksichtigt werden. Zum einen bezüglich der Exzitonen, also der Coulombwechselwirkung zwischen Loch im Valenzband und Elektron im Leitungsband, oder zwischen Elektron und Elektron zweier verschiedener Quantenpunkte. Mit gegebener Wellenfunktion leitet sich folgender allgemeine Ausdruck her

$$H_{e-e} = \frac{1}{2} \sum_n \sum_m \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r_1 \int d^3r_2 \left\{ \frac{\psi_n^*(\underline{r}_1, t) \psi_m^*(\underline{r}_2, t) \psi_m(\underline{r}_2, t) \psi_n(\underline{r}_1, t)}{|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|} \right\} \quad (\text{A.3.15})$$

$$= \sum_{\substack{mnop \\ ijkl}} V_{mnop}^{ijkl} a_{im}^\dagger a_{jn}^\dagger a_{ko} a_{lp}, \quad (\text{A.3.16})$$

wobei sich das Matricelement der Coulombwechselwirkung

$$V_{mnop}^{ijkl} = \frac{1}{2} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r_1 \int d^3r_2 \left\{ \frac{\phi_{im}^*(\underline{r}_1, t) \phi_{jn}^*(\underline{r}_2, t) \phi_{ko}(\underline{r}_2, t) \phi_{lp}(\underline{r}_1, t)}{|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|} \right\} \quad (\text{A.3.17})$$

je nach physikalischer Situation anpassen und auswerten läßt. Im folgenden wird eine mikroskopische und eine mesoskopische Näherung durchgeführt, die jeweils die Coulombwechselwirkung der

Diagonal- und Nichtdiagonalanteile linearisiert. Zuerst wird davon ausgegangen, daß die Integrale in eine Summe aus Integralen über die Anzahl der Elementarzellen:

$$\int d^3r_1 = \sum_1 \int_{EZ_1} d^3r \quad (\text{A.3.18})$$

und die Ortsvektoren als Summe aus einem Aufsatzzpunkt auf die Elementarzelle und einer Variation um diesen Aufsatzzpunkt dargestellt werden können: $\underline{r}_1 = \underline{R} + \underline{r}$ und $\underline{r}_2 = \underline{R}' + \underline{r}'$. Die Linearisierung des Nenners für kleine \underline{r} und \underline{r}' ergibt unter Anwendung der Taylor-Entwicklung bis zur 1. Ordnung:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|} &= \frac{1}{|\underline{R} - \underline{R}'|} + \frac{\underline{r} \cdot \underline{r}'}{|\underline{R} - \underline{R}'|^3} + \frac{(\underline{R} - \underline{R}') \cdot (\underline{r} - \underline{r}')}{|\underline{R} - \underline{R}'|^3} - \\ &- 3 \frac{(\underline{R} - \underline{R}') \cdot \underline{r} (\underline{R} - \underline{R}') \cdot \underline{r}'}{|\underline{R} - \underline{R}'|^5}. \end{aligned} \quad (\text{A.3.19})$$

Der Monopol-Dipolterm besteht aus einem schnellrotierenden und einem langsam rotierenden Anteil und wird in der Rotating-Wave-Approximation, die später bei der Herleitung der Bewegungsgleichungen ihre Anwendung findet, vernachlässigt.

Wird die obige Linearisierung in das Integral eingesetzt, so ergeben sich unter Beachtung, daß Integrale über symmetrische Grenzen von einer geraden und einer ungeraden Funktion verschwinden, Diagonal- und Nichtdiagonalanteile der Coulombwechselwirkung. Für den Diagonalteil folgt nach einer weiteren Taylorentwicklung, die berücksichtigt, daß die Abstände der Quantenpunkt-Elementarzellen zueinander gegenüber dem Abstand der Quantenpunkte selbst klein sind, folgender auswertbarer Ausdruck:

$$\begin{aligned} V_{mnop}^{diag\ ijkl} &= \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \sum_{12} |\xi_{in}(\underline{R}_1)|^2 |\xi_{jn}(\underline{R}_2)|^2 \delta_{ko,jn} \delta_{im,lp} \\ &\left\{ \frac{1}{|\underline{R} - \underline{R}'|} + \frac{\underline{R}_1 \cdot \underline{R}_2}{|\underline{R} - \underline{R}'|^3} - 3 \frac{(\underline{R} - \underline{R}') \cdot \underline{R}_1 (\underline{R} - \underline{R}') \cdot \underline{R}_2}{|\underline{R} - \underline{R}'|^5} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.3.20})$$

Für den Nichtdiagonalterm, aus dem die Förster-Wechselwirkung folgt, gilt mit $\underline{R}_{12} = \underline{R}_1 - \underline{R}_2$:

$$\begin{aligned} V_{diag\ mnop}^{nicht\ ijkl} &= \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{12} \xi_{im}^*(\underline{R}_1) \xi_{lp}(\underline{R}_1) \xi_{jn}^*(\underline{R}_2) \xi_{ko}(\underline{R}_2) \\ &\left\{ \frac{1}{|\underline{R}_{12}|^3} \left[\int d^3r u_{im}^*(\underline{r}) \underline{d} u_{im}(\underline{r}) \right] \left[\int d^3r' u_{jn}^*(\underline{r}') \underline{d}' u_{ko}^*(\underline{r}') \right] - \right. \\ &- \frac{1}{|\underline{R}_{12}|^5} \left[\int d^3r u_{im}^*(\underline{r}) \underline{R}_{12} \cdot \underline{d} u_{im}(\underline{r}) \right] \\ &\left. \left[\int d^3r' u_{jn}^*(\underline{r}') \underline{R}_{12} \cdot \underline{d}' u_{ko}^*(\underline{r}') \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.3.21})$$

Die Nichtdiagonalität erfordert, daß nur jene Matrixelemente ungleich Null sind, für die $i=l$ und $m \neq p$ sowie $j=k$ und $n \neq o$ gilt. Werden noch Terme Null gesetzt, die die Energieerhaltung verletzen, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} H_{e-e} &= V_{12}^F a_{c1}^\dagger a_{v2}^\dagger a_{c2} a_{v1} + V_{21}^F a_{v1}^\dagger a_{c2}^\dagger a_{v2} a_{c1} \\ &+ V_{12}^{cv} a_{c1}^\dagger a_{v2}^\dagger a_{v2} a_{c1} + V_{21}^{cv} a_{v1}^\dagger a_{c2}^\dagger a_{c2} a_{v1} \\ &+ V_{21}^{cc} a_{c1}^\dagger a_{c2}^\dagger a_{c2} a_{c1} + V_{21}^{vv} a_{v1}^\dagger a_{v2}^\dagger a_{v2} a_{v1}. \end{aligned} \quad (\text{A.3.22})$$

A.4 Quantisierung von H_p

In der Viel-Teilchen-Theorie hat es sich als sinnvoll erwiesen, in den Formalismus der zweiten Quantisierung überzugehen, d.h. das Schrödingersche Elektron- wie das Lichtfeld mittels Erzeuger- und Vernichtoperatoren darzustellen. Für den Hamiltonoperator des Lichtfeldes in Coulombbeichung gilt im Vakuum:

$$H_p = \frac{1}{2} \int d^3r \sum_i \epsilon_0 [\partial_t A_i(\underline{r}, t)]^2 + \frac{1}{\mu_0} [\nabla \times A(\underline{r}, t)]_i^2. \quad (\text{A.4.23})$$

Formt man mittels des Gaußschen Satzes und einer partiellen Integration sowie der Forderung, daß nicht nur die Potentiale, sondern auch deren Ableitungen am Integrationsrand verschwinden, Gleichung A.4.23 um, so folgt (für Details, siehe Appendix A.5):

$$H_p = \frac{1}{2} \int d^3r \sum_i \epsilon_0 [\partial_t A_i(\underline{r}, t)]^2 + \sum_j \frac{1}{\mu_0} [\partial_j A_i(\underline{r}, t)]^2. \quad (\text{A.4.24})$$

Setzt man nun das Vektorpotential wie definiert ein und verwendet folgende bezüglich der Polarisation geltenden nützlichen Identitäten [Sch07], die aus der reinen Transversalität des betrachteten elektromagnetischen Feldes (Beweis über die Maxwell-Gleichungen) folgen:

$$\underline{e}_{\underline{k}\mu} \cdot \underline{k} = 0 \quad (\text{A.4.25})$$

$$\sum_{\mu} (\underline{e}_{\underline{k}\mu})_i \cdot (\underline{e}_{\underline{k}\mu})_j = \delta_{ij} - k_i k_j, \quad (\text{A.4.26})$$

so kann Gleichung A.4.23 in die Form

$$H_p = \frac{1}{2} \sum_{\underline{k}\mu} \hbar \omega_{\underline{k}} \left\{ c_{\underline{k}\mu} c_{\underline{k}\mu}^{\dagger} + c_{\underline{k}\mu}^{\dagger} c_{\underline{k}\mu} \right\} \quad (\text{A.4.27})$$

gebracht werden. Mittels einer Nulladdition und unter Ausnutzung der Vertauschungsregel läßt sich nun der Hamiltonoperator wie folgt darstellen:

$$H_p = \sum_{\underline{k}\mu} \hbar \omega_{\underline{k}} \left\{ c_{\underline{k}\mu}^{\dagger} c_{\underline{k}\mu} + \frac{1}{2} \right\}. \quad (\text{A.4.28})$$

A.5 Quantisierung von H_p : Nebenrechnung

Kleine Nebenrechnung zur Quantisierung des Lichtfeldes im Vakuum. Umschreiben der Rotation:

$$\int d^3r \sum_i (\nabla \times \underline{A})_i^2 = \int d^3r \left[\sum_{i,i \neq j} (\partial_i A_j)^2 - \nabla \cdot \tilde{\underline{A}} + \underline{A} \cdot \nabla (\nabla \cdot \underline{A}) - \sum_j \underline{A}_j \partial_j \partial_j \underline{A}_j \right]$$

mit

$$\tilde{\underline{A}} = \begin{pmatrix} A_2 \partial_2 A_1 + A_3 \partial_3 A_1 \\ A_3 \partial_3 A_2 + A_1 \partial_1 A_2 \\ A_2 \partial_3 A_3 + A_1 \partial_1 A_3 \end{pmatrix} \quad (\text{A.5.29})$$

Dieser Ausdruck läßt sich auswerten mit der Coulomb-Eichung $\nabla \cdot \underline{A} = 0$ und

$$\int d^3r \nabla \cdot \tilde{\underline{A}} = \oint_{\partial V} \underline{A} \cdot d\underline{f} = 0 \quad (\text{A.5.30})$$

falls die Ableitung des Vektorpotentials am Rand verschwindet sowie durch partielle Integration und der Forderung, daß auch das Vektorpotential am Rand null wird:

$$-\int d^3r \left[\sum_j \underline{A}_j \partial_j \partial_j \underline{A}_j \right] = \int d^3r \left[\sum_j (\partial_j \underline{A}_j)^2 \right] \quad (\text{A.5.31})$$

umformen in:

$$\int d^3r \sum_i (\nabla \times \underline{A})_i^2 = \int d^3r \left[\sum_{i,j} (\partial_i A_j)^2 \right].$$

A.6 Quantisierung von H_{e-p} : Auswertung des Integrals

Um den Wechselwirkungs-Hamilton-Operator in einen reinen Transportteil (Intrabandanteil) und einen Interbandanteil zerlegen zu können, wird eine Variablensubstitution $\underline{r} = \underline{r}' + \underline{R}$ durchgeführt. Die neue Ortsvariable setzt sich aus einem Aufsatzzpunkt innerhalb der Elementarzelle (\underline{R}) und einer Variation um diesen zusammen (\underline{r}'). Diese Variablensubstitution hat zum Vorteil, daß nur noch über die Variation innerhalb der Elementarzelle integriert wird (\underline{R} variiert nicht). Zur weiteren Vereinfachung können daher die Einhüllenden-Näherungen (ξ_λ variiert nur vernachlässigbar schwach innerhalb einer Elementarzelle) und die Orthonormierung der Blochfunktion (auf die Elementarzelle beschränkt) ausgenutzt werden.

$$\begin{aligned} H_{e-p} &= -q \sum_{\lambda, \lambda'} \xi_\lambda^*(\underline{R}) \xi_{\lambda'}(\underline{R}) \int d^3r' u_{k\lambda}^*(r') (\underline{r}' + \underline{R}) \cdot \underline{E}(\underline{r}_n) u_{k\lambda'}(r') a_\lambda^\dagger(t) a_{\lambda'}(t) \\ &= -q \sum_{\lambda, \lambda'} \xi_\lambda^*(\underline{R}) \xi_{\lambda'}(\underline{R}) \underline{R} \cdot \underline{E}(\underline{r}_n) \underbrace{\int d^3r' u_{k\lambda}^*(r') u_{k\lambda'}(r') a_\lambda^\dagger(t) a_{\lambda'}(t)}_{\delta_{\lambda\lambda'}} \\ &\quad + \sum_{\lambda, \lambda'} \xi_\lambda^*(\underline{R}) \xi_{\lambda'}(\underline{R}) \underline{E}(\underline{r}_n) \cdot \underbrace{\int d^3r' u_{k\lambda}^*(r') (-q\underline{r}') u_{k\lambda'}(r') a_\lambda^\dagger(t) a_{\lambda'}(t)}_{\underline{d}_{\lambda\lambda'}} \\ &= -q \sum_\lambda |\xi_\lambda(\underline{R})|^2 \underline{R} \cdot \underline{E}(\underline{r}_n) a_\lambda^\dagger(t) a_\lambda(t) \\ &\quad + \sum_{\lambda, \lambda'} \xi_\lambda^*(\underline{R}) \xi_{\lambda'}(\underline{R}) \underline{d}_{\lambda\lambda'} \cdot \underline{E}(\underline{r}_n) a_\lambda^\dagger(t) a_{\lambda'}(t). \end{aligned}$$

A.7 Zeitentwicklung des Bad-Operators: Berechnung der Kommutatoren

Für den hier vorliegenden Fall werden dissipative Moden angenommen, die über den Dipol-Operator mit dem elektronischen System koppeln. In Rotating-Wave-Approximation lautet H_D (Referenz aus den Hamilton 1. Teil) mit

$$\begin{aligned} M_k^R &= M_k^{vc} e^{-i(\omega_R - \omega_k)t} \\ M_k^{R*} &= -M_k^{cv} e^{i(\omega_R - \omega_k)t} \\ M_{k'}^R &= M_{k'}^{vc} e^{-i(\omega_R - \omega_k)t'} \\ M_{k'}^{R*} &= -M_{k'}^{cv} e^{i(\omega_R - \omega_k)t'} \end{aligned}$$

und

$$H_D = \sum_k M_k^R a_v^\dagger a_c c_k^\dagger + M_k^{R*} a_c^\dagger a_v c_k. \quad (\text{A.7.32})$$

Diese Wechselwirkung wird in 2.6.61 eingesetzt und ausgewertet, indem die Kommutatoren ausgerechnet werden und die Spur gebildet wird. Für den Einzelkommutator ergibt sich:

$$\begin{aligned} & \text{Tr}_R \left[[H_D(t), \rho_S(t_i) \otimes \rho_R(t_i)] \right] = \\ &= \text{Tr}_R \left[\left[\sum_k M_k^R a_v^\dagger a_c c_k^\dagger, \rho_S(t_i) \otimes \rho_R(t_i) \right] \right] + \text{h.a.} \\ &= \sum_k M_k^R \text{Tr}_R \left[a_v^\dagger a_c c_k^\dagger \rho_S(t_i) \otimes \rho_R(t_i) - \rho_S(t_i) \otimes \rho_R(t_i) a_v^\dagger a_c c_k^\dagger \right] + \text{h.a.} \quad (\text{A.7.33}) \\ &= \sum_k M_k^R a_v^\dagger a_c \rho_S(t_i) \otimes \text{Tr}_R \left[c_k^\dagger \rho_R(t_i) \right] - \rho_S(t_i) \otimes a_v^\dagger a_c \text{Tr}_R \left[\rho_R(t_i) c_k^\dagger \right] + \text{h.a.} \\ &= \sum_k M_k^R \langle c_k^\dagger \rangle \left[a_v^\dagger a_c, \rho_S(t_i) \right] + \text{h.a.} . \end{aligned}$$

Für den Doppelkommutator nach selbiger Rechnung und Anwendung der Spur

$$\begin{aligned} & \text{Tr}_R \left[[H_D(t), [H_D(t'), \rho_S(t') \otimes \rho_R(t')]] \right] = \\ &= \sum_{k,k'} M_k^R M_{k'}^R \langle c_k^\dagger c_{k'}^\dagger \rangle \{ a_v^\dagger a_c a_v^\dagger a_c \rho_S - 2 a_v^\dagger a_c \rho_S a_v^\dagger a_c + \rho_S a_v^\dagger a_c a_v^\dagger a_c \} \\ &+ \sum_{k,k'} M_k^R M_{k'}^{R*} \langle c_k^\dagger c_{k'} \rangle \{ a_v^\dagger a_c a_c^\dagger a_v \rho_S - a_c^\dagger a_v \rho_S a_v^\dagger a_c \} \\ &+ \sum_{k,k'} M_k^R M_{k'}^{R*} \langle c_{k'} c_k^\dagger \rangle \{ \rho_S a_c^\dagger a_v a_v^\dagger a_c - a_v^\dagger a_c \rho_S a_c^\dagger a_v \}. \quad (\text{A.7.34}) \end{aligned}$$

A.8 Dichteoperator des Bads ρ_R : Dissipative Moden

Die spontane Emission ist ungerichtet und erzeugt ein thermisches Lichtfeld, das der Bose-Einstein-Statistik gehorcht und durch folgenden Operator dargestellt wird:

$$\rho_R = \prod_k \left[1 - \exp\left(-\frac{\hbar\omega_k}{k_B T}\right) \right] \exp\left(-\frac{\hbar\omega_k}{k_B T} c_k^\dagger c_k\right). \quad (\text{A.8.35})$$

Die Erwartungswerte können berechnet werden:

$$\langle c_k^\dagger c_{k'} \rangle = \delta_{kk'} n_k \quad (\text{A.8.36})$$

$$\langle c_{k'} c_k^\dagger \rangle = \delta_{kk'} (n_k + 1) \quad (\text{A.8.37})$$

$$\langle c_k c_{k'} \rangle = \langle c_k^\dagger c_{k'}^\dagger \rangle = 0 \quad (\text{A.8.38})$$

$$\langle c_k^\dagger \rangle = \langle c_k \rangle = 0 \quad (\text{A.8.39})$$

mit

$$n_k = \frac{\delta_{kk'}}{\exp(\frac{\hbar\omega_k}{k_B T}) - 1}. \quad (\text{A.8.40})$$

A.9 Licht-Kopplungs-Element: Einsteinkoeffizient

Als erstes muß die Summe in ein Integral überführt werden, mit der bekannten Ersetzung für zwei Polarisationsrichtungen

$$\sum_k = \sum_k \frac{(\Delta k)^3}{(\Delta k)^3} \rightarrow \frac{1}{(\Delta k)^3} \int d^3 k = 2 \frac{V}{8\pi^3} \int d^3 k,$$

wobei $\Delta k = \frac{2\pi}{L}$ die Moden-Dichte darstellt (Hierfür wurden periodische Randbedingungen angenommen). Das Integral kann in Kugelkoordinaten geschrieben werden:

$$\frac{V}{4\pi^3} \int d^3 k = \frac{V}{4\pi^3} \int_0^\infty dk k^2 \int_0^\pi d\Theta \sin \Theta \int_0^{2\pi} d\phi.$$

Das Licht-Kopplungs-Element lautet ausgeschrieben:

$$M_{k\mu}^{vc} = i \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\epsilon_0 V}} X_{vc} \epsilon_{k\mu} \cdot \underline{d}_{vc} e^{-\underline{k} \cdot \underline{L}_{0n}}. \quad (\text{A.9.41})$$

Das Skalarprodukt zwischen den Polarisationsvektor und dem Dipolmoment wird geometrisch ausgewertet

$$\epsilon_{k\mu} \cdot \underline{d}_{vc} = |\epsilon_{k\mu}| |\underline{d}_{vc}| \cos \theta. \quad (\text{A.9.42})$$

Eingesetzt in 2.6.63, das Integral über ϕ und die Deltafunktion bezüglich k ausgewertet sowie das Koordinatensystem so gelegt, daß Θ in den Kugelkoordinaten den Winkel zwischen Polarisationsvektor und Dipolmoment beschreibt:

$$\partial_t \rho_S(t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|\epsilon_{k\mu}|^2 |\underline{d}_{vc}|^2 |X_{vc}|^2 \omega_0^3}{\hbar c^3} \int_0^\pi d\Theta \sin \Theta \cos^2 \Theta \left[n_{k_0} \{ a_v^\dagger a_c a_c^\dagger a_v \rho_S - a_c^\dagger a_v \rho_S a_v^\dagger a_c \} + (n_{k_0} + 1) \{ \rho_S a_c^\dagger a_v a_v^\dagger a_c - a_v^\dagger a_c \rho_S a_c^\dagger a_v \} \right].$$

Das Integral über Θ ergibt mit der Variablensubstitution $x = \cos \Theta$

$$\int_0^\pi d\Theta \sin \Theta \cos^2 \Theta = \int_{-1}^1 dx x^2 = \frac{2}{3},$$

und somit

$$\begin{aligned} \partial_t \rho_S(t) = & -\frac{\Gamma}{2} \left[n_{k_0} \{ a_v^\dagger a_c a_c^\dagger a_v \rho_S - a_c^\dagger a_v \rho_S a_v^\dagger a_c \} \right. \\ & \left. + (n_{k_0} + 1) \{ \rho_S a_c^\dagger a_v a_v^\dagger a_c - a_v^\dagger a_c \rho_S a_c^\dagger a_v \} \right] + \text{h.a.}, \end{aligned}$$

wobei der Einsteinkoeffizient der spontanen Emission: $\Gamma = \frac{4 |\epsilon_{k\mu}|^2 |d_{vc}|^2 |X_{vc}|^2 \omega_0^3}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_m 3\hbar c^3}$ lautet.

A.10 Radiative Dämpfung zweier gekoppelter Quantenpunkte

Die Rechnung erfolgt analog zu dem Vorgehen bei einem isolierten Quantenpunkt. Einzig die entsprechenden Werte für die Dämpfungen müssen angepaßt werden, da es zwei Dipolmomente im System gibt. Folgende Dämpfungen ergeben sich:

$$\partial_t \langle G^\dagger G \rangle = 2 \Gamma_{11} \langle B_1^{1\dagger} B_1^1 \rangle + 2 \Gamma_{22} \langle B_2^{1\dagger} B_2^1 \rangle \quad (\text{A.10.43})$$

$$\partial_t \langle B_1^{1\dagger} B_1^1 \rangle = -2 \Gamma_{11} \langle B_1^{1\dagger} B_1^1 \rangle + 2 \Gamma_{11,2} \langle P^{2\dagger} P^2 \rangle \quad (\text{A.10.44})$$

$$\partial_t \langle B_2^{1\dagger} B_2^1 \rangle = -2 \Gamma_{22} \langle B_2^{1\dagger} B_2^1 \rangle + 2 \Gamma_{22,2} \langle P^{2\dagger} P^2 \rangle \quad (\text{A.10.45})$$

$$\partial_t \langle P^{2\dagger} P^2 \rangle = -2 \Gamma_{11,2} \langle P^{2\dagger} P^2 \rangle - 2 \Gamma_{22,2} \langle P^{2\dagger} P^2 \rangle \quad (\text{A.10.46})$$

$$\partial_t \langle G^\dagger B_1^1 \rangle = -\Gamma_{11} \langle G^\dagger B_1^1 \rangle \quad (\text{A.10.47})$$

$$\partial_t \langle G^\dagger B_2^1 \rangle = -\Gamma_{22} \langle G^\dagger B_2^1 \rangle \quad (\text{A.10.48})$$

$$\partial_t \langle B_1^{1\dagger} P^2 \rangle = -[\Gamma_{11} + \Gamma_{11,2} + \Gamma_{22,2}] \langle B_1^{1\dagger} P^2 \rangle \quad (\text{A.10.49})$$

$$\partial_t \langle B_2^{1\dagger} P^2 \rangle = -[\Gamma_{22} + \Gamma_{11,2} + \Gamma_{22,2}] \langle B_2^{1\dagger} P^2 \rangle \quad (\text{A.10.50})$$

$$\partial_t \langle G^\dagger P^2 \rangle = -[\Gamma_{11,2} + \Gamma_{22,2}] \langle G^\dagger P^2 \rangle \quad (\text{A.10.51})$$

$$\partial_t \langle B_1^{1\dagger} B_2^1 \rangle = -[\Gamma_{11} + \Gamma_{22}] \langle B_1^{1\dagger} B_2^1 \rangle \quad (\text{A.10.52})$$

mit den Dämpfungen, die sich aus den jeweiligen Produkten der Lichtkopplungs-Elemente aus errechnen. Hier noch als Integral geschrieben:

$$\frac{\Gamma_{mm'}}{2} = \frac{1}{\hbar^2} \int_{-\infty}^t dt' \sum_k M_{km} M_{km'}^* e^{-i(\omega_R - \omega_k)(t' - t)} \quad (\text{A.10.53})$$

$$\frac{\Gamma_{mm',2}}{2} = \frac{1}{\hbar^2} \int_{-\infty}^t dt' \sum_k M_{km,2} M_{km',2}^* e^{-i(\omega_R - \omega_k)(t' - t)} \quad (\text{A.10.54})$$

$$(\text{A.10.55})$$

mit

$$M_{km} = \sum_n M_{kn}^{vc} d_n^{m*} \quad (\text{A.10.56})$$

$$M_{km,2} = \sum_{i,n \neq i} M_{kn}^{vc} d_i^m. \quad (\text{A.10.57})$$

A.11 Thermischer Lichtpuls: Rechnung

Unter Verwendung von

$$\underline{E}(x, t) = i \int_0^\infty dk \sqrt{\frac{c\hbar k}{\pi\epsilon_0\mathcal{A}}} \underline{e}_{n\mu} \left\{ c(k) e^{-ik(ct-x)} - c^\dagger(k) e^{ik(ct-x)} \right\} \quad (\text{A.11.58})$$

ergibt sich für die i -te Komponente mit verschiedenen k -Werten und für zwei Zeiten²² folgende Proportionalität:

$$\langle E_i(x, t_1) E_i(x, t_2) \rangle = \frac{c\hbar}{\pi\epsilon_0\mathcal{A}} \int_0^\infty dk_1 \int_0^\infty dk_2 \sqrt{k_1 k_2} e_i e'_i \begin{pmatrix} - \langle c(k_1) c(k_2) \rangle e^{-ik_1(ct_1-x) - ik_2(ct_2-x)} \\ + \langle c^\dagger(k_1) c(k_2) \rangle e^{ik_1(ct_1-x) - ik_2(ct_2-x)} \\ + \langle c^\dagger(k_2) c(k_1) \rangle e^{ik_2(ct_2-x) - ik_1(ct_1-x)} \\ - \langle c^\dagger(k_1) c^\dagger(k_2) \rangle e^{ik_1(ct_1-x) + ik_2(ct_2-x)} \end{pmatrix}.$$

Mit 3.2.61 folgt hieraus:

$$\langle E_i(x, t_1) E_i(x, t_2) \rangle = \frac{c\hbar}{\pi\epsilon_0\mathcal{A}} \int_0^\infty dk_1 \int_0^\infty dk_2 \sqrt{k_1 k_2} e_i e'_i \begin{pmatrix} \langle c^\dagger(k_1) c(k_2) \rangle e^{ik_1(ct_1-x) - ik_2(ct_2-x)} \\ + \langle c^\dagger(k_2) c(k_1) \rangle e^{ik_2(ct_2-x) - ik_1(ct_1-x)} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.11.59})$$

Die Werte für die jeweilige Polarisierungen e_i und e'_i sind Zahlen und werden im folgenden 1 gesetzt, da die Polarisation vorerst nicht als gesonderter Parameter beachtet wird. Um eine Formulierung für den Erwartungswert $\langle c^\dagger(k_1) c(k_2) \rangle$ zu bekommen, müssen nun zwei Fourier-Transformationen vom Zeit- in den Frequenzraum durchgeführt werden (für beide Zeiten). Unter Verwendung von

$$\int_{-\infty}^\infty dt_1 e^{ic(k_1-k)t_1} = \frac{2\pi}{c} \delta(k_1 - k) \quad (\text{A.11.60})$$

$$\int_{-\infty}^\infty dt_1 e^{ic(k_1+k)t_1} = 0 \quad (\text{A.11.61})$$

können beide k -Integrale gelöst und folgender Ausdruck für den Erwartungswert gefunden werden:

$$\langle c^\dagger(k) c(k') \rangle = \frac{c\epsilon_0\mathcal{A} e^{i(k-k')x}}{4\pi\hbar\sqrt{k k'}} \int_{-\infty}^\infty dt_1 \int_{-\infty}^\infty dt_2 \langle E_i(x, t_1) E_i(x, t_2) \rangle e^{-i\omega t_1 + i\omega' t_2}. \quad (\text{A.11.62})$$

Nun kann eine Quelle für den Erwartungswert der zeitabhängigen Intensität gewählt werden. Das System soll durch einen Gaußpuls angeregt werden, der von zwei Zeiten abhängt und für identische Zeiten ein Gaußpuls bleibt. Die Intensität bekommt mit $t_0 = \frac{x}{c}$ die Form:

$$\langle E_i(x, t_1) E_i(x, t_2) \rangle = \frac{\sqrt{2\pi}N}{\tau} \underbrace{e^{-\frac{(t_1-t_0)^2}{2\tau^2}} \cos[c\bar{k}(t_1-t_0)]}_{f(t_1)} \underbrace{e^{-\frac{(t_2-t_0)^2}{2\tau^2}} \cos[c\bar{k}(t_2-t_0)]}_{f(t_2)}.$$

²²Zwei Zeiten müssen eingeführt werden, um die zwei k -Werte begründen zu können, also eine Fourier-Transformation, die noch folgt, zu ermöglichen.

Die Intensität faktorisiert in zwei Funktionen, die jeweils von verschiedenen Zeiten abhängen, als Schwerpunktsfrequenz ist $\bar{\omega} = c\bar{k}$ gewählt. Eingesetzt in A.11.62 müssen nun zwei Fourier-Transformationen durchgeführt werden.

Beispielrechnung für t_1 . Der Kosinus wird in Exponentialfunktionen ausgedrückt:

$$\cos [c\bar{k}(t_1 - t_0)] = \frac{1}{2} \left\{ e^{ic\bar{k}(t_1-t_0)} + e^{-ic\bar{k}(t_1-t_0)} \right\} \quad (\text{A.11.63})$$

und eine Nulladdition durchgeführt (statt einer Variablensubstitution), um die Rechnung zu vereinfachen:

$$e^{-i\omega t_1} = e^{-ik(ct_1-x+x)} = e^{-ikx} e^{-ick(t_1-t_0)}. \quad (\text{A.11.64})$$

Es folgt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt_1 f(t_1) e^{-i\omega t_1} = \frac{1}{2} e^{-ikx} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 e^{-\frac{(t_1-t_0)^2}{2\tau^2}} \left\{ e^{ic\bar{k}(t_1-t_0)} + e^{-ic\bar{k}(t_1-t_0)} \right\} e^{-ick(t_1-t_0)}.$$

Die Exponenten werden zusammengefaßt und eine quadratische Ergänzung durchgeführt:

$$\begin{aligned} & (t_1 - t_0)^2 + 2(t_1 - t_0)i\tau^2 c(k \pm \bar{k}) + [i\tau^2 c(k \pm \bar{k})]^2 - [i\tau^2 c(k \pm \bar{k})]^2 \\ &= [(t_1 - t_0) + i\tau^2 c(k \pm \bar{k})]^2 + \tau^4 c^2 (k \pm \bar{k})^2. \end{aligned}$$

Es ergibt sich also ein von t_1 unabhängiger Term. Mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt_1 e^{-\frac{1}{2\tau^2} [(t_1-t_0)+i\tau^2 c(k\pm\bar{k})]^2} = \sqrt{2\pi} \tau \quad (\text{A.11.65})$$

folgt aus der Funktionentheorie:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt_1 f(t_1) e^{-i\omega t_1} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \tau e^{-ikx} \left\{ e^{-\frac{1}{2}\tau^2 c^2 (k-\bar{k})^2} + e^{-\frac{1}{2}\tau^2 c^2 (k+\bar{k})^2} \right\}. \quad (\text{A.11.66})$$

Dies für t_2 ausgeführt und in A.11.62 eingesetzt mit

$$f(k) = \sqrt{\frac{\sqrt{2\pi}N}{\tau}} \sqrt{\frac{2\epsilon_0 A}{\hbar c k}} \frac{\tau c}{4} \left\{ e^{-\frac{1}{2}\tau^2 c^2 (k-\bar{k})^2} + e^{-\frac{1}{2}\tau^2 c^2 (k+\bar{k})^2} \right\} \quad (\text{A.11.67})$$

lautet der Erwartungswert der Lichtoperatoren:

$$\langle c^\dagger(k)c(k') \rangle = f(k) f(k') \quad (\text{A.11.68})$$

Als Einheit ergibt sich (zur Überprüfung) mit

$$[\epsilon_0] = \frac{As}{Vm} \quad (\text{A.11.69})$$

$$[\hbar] = VAs^2. \quad (\text{A.11.70})$$

unter Berücksichtigung der Quantisierungsvolumina der Lichtoperatoren für den Erwartungswert der Lichtoperatoren: Frequenz durch Intensität.

A.12 Korrelierte Bewegungsgleichungen: 1 Quantenpunkt

Kohärente Anregung

$$\begin{aligned}
\partial_t \langle a_v^\dagger a_c c_k \rangle_R^c &= (i\omega_R - i\omega_1 - \Gamma) \langle a_v^\dagger a_c c_k \rangle_R^c - i \bar{M}_k^R (\langle a_v^\dagger a_c \rangle_R^c)^2 \\
&\quad - i \sum_{k'} \bar{M}_{k'}^{R*} \langle c_{k'} \rangle \left\{ \langle a_v^\dagger a_c c_k \rangle_R^c - \langle a_v^\dagger a_v c_k \rangle_R^c \right\} \\
&\quad - i \sum_{k'} \bar{M}_{k'}^{R*} \langle c_k c_{k'} \rangle_R^c \left\{ \langle a_c^\dagger a_c \rangle_R^c - \langle a_v^\dagger a_v \rangle_R^c \right\}
\end{aligned} \tag{A.12.71}$$

$$\begin{aligned}
\partial_t \langle a_v^\dagger a_v c_k \rangle_R^c &= -2 \Gamma \langle a_v^\dagger a_v c_k \rangle_R^c + i \bar{M}_k^R \langle a_c^\dagger a_c \rangle_R^c \langle a_v^\dagger a_c \rangle_R^c \\
&\quad - i \sum_{k'} \bar{M}_{k'}^{R*} \langle c_{k'} \rangle \langle a_c^\dagger a_v c_k \rangle_R^c \\
&\quad + i \sum_{k'} \bar{M}_{k'}^R \langle c_{k'}^\dagger \rangle \langle a_v^\dagger a_c c_k \rangle_R^c \\
&\quad + i \sum_{k'} \bar{M}_{k'}^R \langle c_{k'}^\dagger c_k \rangle_R^c \langle a_v^\dagger a_c \rangle_R^c \\
&\quad - i \sum_{k'} \bar{M}_{k'}^{R*} \langle c_{k'} c_k \rangle_R^c \langle a_c^\dagger a_v \rangle_R^c
\end{aligned} \tag{A.12.72}$$

$$\begin{aligned}
\partial_t \langle a_c^\dagger a_c c_k \rangle_R^c &= -2 \Gamma \langle a_c^\dagger a_c c_k \rangle_R^c - i \bar{M}_k^R \langle a_c^\dagger a_c \rangle_R^c \langle a_v^\dagger a_c \rangle_R^c \\
&\quad + i \sum_{k'} \bar{M}_{k'}^{R*} \langle c_{k'} \rangle \langle a_c^\dagger a_v c_k \rangle_R^c \\
&\quad - i \sum_{k'} \bar{M}_{k'}^R \langle a_v^\dagger a_c c_k \rangle_R^c \\
&\quad - i \sum_{k'} \bar{M}_{k'}^R \langle c_{k'}^\dagger c_k \rangle_R^c \langle a_v^\dagger a_c \rangle_R^c \\
&\quad + i \sum_{k'} \bar{M}_{k'}^{R*} \langle c_{k'} c_k \rangle_R^c \langle a_c^\dagger a_v \rangle_R^c
\end{aligned} \tag{A.12.73}$$

$$\partial_t \langle c_k c_{k'} \rangle_R^c = i \bar{M}_{k'}^R \langle a_v^\dagger a_c c_k \rangle_R^c + i \bar{M}_k^R \langle a_v^\dagger a_c c_{k'} \rangle_R^c \tag{A.12.74}$$

$$\partial_t \langle c_k^\dagger c_{k'} \rangle_R^c = i \bar{M}_{k'}^R \langle a_v^\dagger a_c c_k^\dagger \rangle_R^c - i \bar{M}_k^{R*} \langle a_c^\dagger a_v c_{k'} \rangle_R^c \tag{A.12.75}$$

Abschließend noch der Vollständigkeit halber die Erwartungswerte des anregenden, kohärenten Feldes, aus denen der Lichtpuls konstruiert werden wird:

$$\partial_t \langle c_{k'} \rangle_R = i \bar{M}_{k'}^R \langle a_v^\dagger a_c \rangle_R^c \tag{A.12.76}$$

$$\partial_t \langle c_{k'}^\dagger \rangle_R = -i \bar{M}_{k'}^{R*} \langle a_c^\dagger a_v \rangle_R^c \tag{A.12.77}$$

A.13 Blochgleichungen: Analytische Lösung

Für eine nicht stationäre Anregung variiert der Puls zeitlich und die Oszillationsgleichungen schreiben sich wie folgt mit $\Omega(t) = \bar{M}_{k'}^{vc} \langle c_k \rangle$:

$$\partial_t \langle a_c^\dagger a_c \rangle_R = -i \Omega(t) [\langle a_v^\dagger a_c \rangle - \langle a_v^\dagger a_c \rangle^*] \tag{A.13.78}$$

$$\partial_t \langle a_v^\dagger a_c \rangle_R = -i \Omega(t) \{2 \langle a_c^\dagger a_c \rangle - 1\} \tag{A.13.79}$$

Definiere neue Größen:

$$a(t) = 2 \langle a_c^\dagger a_c \rangle - 1 \quad (\text{A.13.80})$$

$$b(t) = i [\langle a_v^\dagger a_c \rangle - \langle a_v^\dagger a_c \rangle^*] \quad (\text{A.13.81})$$

Über die Zeitableitung schreibt sich das Gleichungssystem 1. Ordnung mit $\tilde{\Omega}(t) = 2\Omega(t)$ wie folgt:

$$\dot{a}(t) = -\tilde{\Omega}(t) b(t) \quad (\text{A.13.82})$$

$$\dot{b}(t) = \tilde{\Omega}(t) a(t) \quad (\text{A.13.83})$$

Im nächsten Schritt nutzt man die Eigenschaft des Gaußpulses aus, über eine Pulsfläche

$$\Theta(t) = \int_{-\infty}^t \tilde{\Omega}(t') dt' \quad (\text{A.13.84})$$

$$\frac{d\Theta(t)}{dt} = \tilde{\Omega}(t) \quad (\text{A.13.85})$$

mit $\Theta(-\infty) = 0$, definiert zu sein. Eine Koordinationstransformation mit berücksichtigter Kettenregel führt dann auf:

$$\dot{a}(t) = \frac{da(\Theta)}{dt} = \frac{\partial a}{\partial \Theta} \frac{d\Theta}{dt} = a' \dot{\Theta} \quad (\text{A.13.86})$$

$$\dot{b}(t) = \frac{db(\Theta)}{dt} = \frac{\partial b}{\partial \Theta} \frac{d\Theta}{dt} = b' \dot{\Theta} \quad (\text{A.13.87})$$

und damit:

$$a'(\Theta) = -b(\Theta) \quad (\text{A.13.88})$$

$$b'(\Theta) = a(\Theta) \quad (\text{A.13.89})$$

Als Lösung ergibt sich mit den ausgewerteten Anfangsbedingungen (Grundzustand) $\langle a_c^\dagger a_c \rangle = 0 \rightarrow a(\Theta(-\infty)) = -1$ und $\langle a_v^\dagger a_c \rangle = 0 \rightarrow b(\Theta(-\infty)) = 0$ und der allgemeinen Lösung $a(\Theta) = A \sin(\Theta) + B \cos(\Theta)$:

$$a(\Theta) = -\cos(\Theta) \rightarrow \langle a_c^\dagger a_c \rangle = \frac{1}{2}(1 - \cos(\Theta)) = \sin^2\left(\frac{\Theta}{2}\right) \quad (\text{A.13.90})$$

$$b(\Theta) = \sin(\Theta) \rightarrow \text{Im} \langle a_v^\dagger a_c \rangle = \frac{1}{2} \sin(\Theta) \rightarrow \langle a_v^\dagger a_c \rangle = \frac{i}{2} \sin(\Theta) \quad (\text{A.13.91})$$

A.14 Thermischer Lichtpuls: k-Summen-Auswertung

Nebenrechnung zur Auswertung der inkohärenten Photonendichte:

$$\begin{aligned} \sum_{k'} \bar{M}_{k'}^{R*} \langle c_k^\dagger c_{k'} \rangle_R^c &= f(k) \sum_{k'} \bar{M}_{k'}^{R*} f(k') \\ &= f(k) \sum_{k'} \bar{M}^* \sqrt{\frac{\hbar c k'}{2\epsilon_0 \mathcal{A} \mathcal{L}}} e^{i\omega_{Rt} - ik'(ct - r_{0n})} f(k') \\ &= f(k) \frac{\bar{M}^*}{4} e^{i\omega_{Rt}} \int_0^\infty dk' \sqrt{\frac{4\hbar c k'}{\pi \epsilon_0 \mathcal{A}}} e^{-ik'(ct - r_{0n})} f(k') \\ &= f(k) \frac{\bar{M}^*}{4} e^{i\omega_{Rt}} \Omega(t) \end{aligned} \quad (\text{A.14.92})$$

mit $\hbar \bar{M} = iX_{vc} \underline{\epsilon}_\mu \cdot \underline{d}_{vc}$ und

$$\Omega(t) = \sqrt{\frac{\sqrt{2\pi}N}{\tau}} \cos[\bar{\omega}(t - t_0)] e^{-\frac{(t-t_0)^2}{2\tau^2}} \quad (\text{A.14.93})$$

A.15 Licht-Materie-Wechselwirkung: Lokale Basis

Für die Licht-Materie-Wechselwirkung gilt für die Grundzustandsoperator G:

$$H_{e-pt}G = \sum_{kn} M_{kn}^{cv} (P_n^1)^\dagger G \{c_k^\dagger - c_k\} \quad (\text{A.15.94})$$

$$GH_{e-pt} = \sum_{kn} M_{kn}^{vc} G^\dagger P_n^1 \{c_k - c_k^\dagger\} \quad (\text{A.15.95})$$

für den Polarisationsoperator P_i^1 :

$$H_{e-pt}P_i^1 = \sum_{kn} M_{kn}^{cv} (P_n^1)^\dagger P_i^1 \{c_k^\dagger - c_k\} \quad (\text{A.15.96})$$

$$P_i^1 H_{e-pt} = \sum_{k,n \neq i} (M_{kn}^{vc} G^\dagger P^2 + M_{ki}^{cv} G^\dagger G) \{c_k - c_k^\dagger\} \quad (\text{A.15.97})$$

für den Doppel-Polarisationsoperator P^2 :

$$H_{e-pt}P^2 = \sum_{kn} M_{kn}^{cv} (P_n^1)^\dagger P^2 \{c_k^\dagger - c_k\} \quad (\text{A.15.98})$$

$$P^2 H_{e-pt} = \sum_{k,i,n \neq i} M_{kn}^{cv} G^\dagger P_i^1 \{c_k - c_k^\dagger\} \quad (\text{A.15.99})$$

A.16 Diagonalisierung der 2x2-Matrix

Zur Diagonalisierung bleibt nur der Teil des Hamilton-Operators, der von den Polarisierungen abhängt:

$$H_{pp} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & V_F \\ V_F & \epsilon_2 \end{pmatrix}$$

Die Eigenwerte ergeben sich aus der Berechnung der Determinante:

$$(\epsilon_1 - E_1)(\epsilon_2 - E_1) = (\epsilon_1 - E_2^1)(\epsilon_2 - E_2^1) = V_F^2 \quad (\text{A.16.100})$$

Die quadratische Gleichung kann durch quadratische Ergänzung gelöst werden:

$$E_1^1 = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2} + \sqrt{\frac{(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2}{4} + V_F^2} \quad (\text{A.16.101})$$

$$E_2^1 = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2} - \sqrt{\frac{(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2}{4} + V_F^2} \quad (\text{A.16.102})$$

Für das Energie-Splitting ergibt sich:

$$\Delta E = E_1^1 - E_2^1 = \sqrt{(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + 4 V_F^2} \quad (\text{A.16.103})$$

Mit $N = \sqrt{1 + \left(\frac{V_F}{\epsilon_1 - E_1^1}\right)^2}$ ergibt sich für die Eigenvektoren:

$$e_1 = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} -\frac{V_F}{\epsilon_1 - E_1^1} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.16.104})$$

$$e_2 = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{V_F}{\epsilon_1 - E_1^1} \end{pmatrix} \quad (\text{A.16.105})$$

Es gilt nun:

$$\frac{1}{N^2} \begin{pmatrix} -\frac{V_F}{\epsilon_1 - E_1^1} & 1 \\ 1 & \frac{V_F}{\epsilon_1 - E_1^1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_1 & V_F \\ V_F & \epsilon_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{V_F}{\epsilon_1 - E_1^1} & 1 \\ 1 & \frac{V_F}{\epsilon_1 - E_1^1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1^1 & 0 \\ 0 & E_2^1 \end{pmatrix}$$

Also (mit reeller Förster-Wechselwirkung):

$$\frac{1}{N} \begin{pmatrix} -\frac{V_F}{\epsilon_1 - E_1^1} & 1 \\ 1 & \frac{V_F}{\epsilon_1 - E_1^1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1^1 & d_2^1 \\ d_1^2 & d_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1^{*1} & d_2^{*1} \\ d_1^{*2} & d_2^{*2} \end{pmatrix}$$

A.17 Bewegungsgleichungen für zwei gekoppelte Quantenpunkte

Exzitonübergang von Quantenpunkt n zu m:

$$\begin{aligned} \partial_t \langle B_m^{1\dagger} B_n^1 \rangle &= -i [\omega_n^1 - \omega_m^1 - 2i\Gamma] \langle B_m^{1\dagger} B_n^1 \rangle \\ &\quad - i \left[\bar{M}_{km,2}^* \langle P^{2\dagger} B_n^1 c_k \rangle - \bar{M}_{kn,2} \langle B_m^{1\dagger} P^2 c_k^\dagger \rangle \right] \\ &\quad - i \left[\bar{M}_{km} \langle G^\dagger B_n^1 c_k^\dagger \rangle - \bar{M}_{kn}^* \langle B_m^{1\dagger} G c_k \rangle \right] \end{aligned} \quad (\text{A.17.106})$$

Photon-Dubletts (werden eigentlich nicht gebraucht, wegen Vernachlässigung des rückwirkenden Feldes, der Vollständigkeit halber dennoch angegeben):

$$\partial_t \langle c_k^\dagger c_k \rangle = -2 \operatorname{Im} \left[\sum_l \bar{M}_{kl} \langle G^\dagger B_l^1 c_k^\dagger \rangle + \bar{M}_{kl,2} \langle B_l^\dagger P^2 c_k^\dagger \rangle \right] \quad (\text{A.17.107})$$

Photondichte assistierter Grundzustand:

$$\begin{aligned} \partial_t \langle G^\dagger G c_k^\dagger c_{k'} \rangle &= 2 \Gamma \left[\langle B_1^{1\dagger} B_1^1 c_k^\dagger c_{k'} \rangle + \langle B_2^{1\dagger} B_2^1 c_k^\dagger c_{k'} \rangle \right] \\ &\quad - 2 \operatorname{Im} \left[\sum_m \bar{M}_{km} \langle G^\dagger B_m^1 c_k^\dagger \rangle + \bar{M}_{km} \langle G^\dagger B_m^1 c_k^\dagger c_k^\dagger c_{k'} \rangle \right] \end{aligned} \quad (\text{A.17.108})$$

Photondichte assistierte Exzitonendichte oder -übergang von Quantenpunkt n zu m:

$$\begin{aligned} \partial_t \langle B_m^{1\dagger} B_n^1 c_k^\dagger c_k \rangle &= -i(\omega_n^1 - \omega_m^1 - 2i\Gamma) \langle B_m^{1\dagger} B_n^1 c_k^\dagger c_k \rangle \\ &\quad - i \left[\bar{M}_{km,2}^* \langle P^{2\dagger} B_n^1 c_k \rangle - \bar{M}_{kn,2} \langle B_m^{1\dagger} P^2 c_k^\dagger \rangle \right] \\ &\quad - i \left[\bar{M}_{km,2}^* \langle P^{2\dagger} B_n^1 c_k^\dagger c_k c_k \rangle - \bar{M}_{kn,2} \langle B_m^{1\dagger} P^2 c_k^\dagger c_k^\dagger c_k \rangle \right] \\ &\quad - i \left[\bar{M}_{km} \langle G^\dagger B_n^1 c_k^\dagger c_k^\dagger c_k \rangle - \bar{M}_{kn}^* \langle B_m^{1\dagger} G c_k^\dagger c_{k'} c_k \rangle \right] \end{aligned} \quad (\text{A.17.109})$$

Photondichte assistierte 2er-Exzitondichte:

$$\partial_t \langle P^{2\dagger} P^2 c_k^\dagger c_k \rangle = -4 \Gamma \langle P^{2\dagger} P^2 c_k^\dagger c_k \rangle + 2 \operatorname{Im} \left[\sum_m \bar{M}_{km,2} \langle B_m^{1\dagger} P^2 c_k^\dagger c_k c_k \rangle \right] \quad (\text{A.17.110})$$

Zweifach Polarisation

$$\begin{aligned} \partial_t \langle G^\dagger P^2 c_k^\dagger c_k^\dagger \rangle &= -i(\omega^2 - 2\omega_k - 2i\Gamma) \langle G^\dagger P^2 c_k^\dagger c_k^\dagger \rangle - 2i \sum_m \bar{M}_{km}^* \langle B_m^{1\dagger} P^2 c_k^\dagger \rangle \\ &+ i \sum_{m'} \bar{M}_{km,2}^* \langle G^\dagger B_m^1 c_k^\dagger c_k^\dagger c_k \rangle - \bar{M}_{km}^* \langle B_m^{1\dagger} P^2 c_k^\dagger c_k^\dagger c_k \rangle \end{aligned} \quad (\text{A.17.111})$$

Photondichte getriebene Photon-assistierte Polarisation (1)

$$\begin{aligned} \partial_t \langle G^\dagger B_n^1 c_k^\dagger c_k^\dagger c_k \rangle &= -i [\omega_n^1 - \omega_k - i\Gamma] \langle G^\dagger B_n^1 c_k^\dagger c_k^\dagger c_k \rangle \\ &+ i \bar{M}_{kn,2} \left[\langle G^\dagger P^2 c_k^\dagger c_k^\dagger \rangle + \langle G^\dagger P^2 c_k^\dagger c_k^\dagger c_k^\dagger c_k \rangle \right] \\ &- i \sum_l \bar{M}_{kl}^* \langle B_l^{1\dagger} B_n^1 c_k^\dagger c_k^\dagger c_k c_k \rangle - \bar{M}_{kn}^* \langle G^\dagger G c_k^\dagger c_k^\dagger c_k c_k \rangle \\ &- 2i \sum_l \bar{M}_{kl}^* \langle B_l^{1\dagger} B_n^1 c_k^\dagger c_k \rangle \end{aligned} \quad (\text{A.17.112})$$

$$\begin{aligned} \partial_t \langle B_m^{1\dagger} P^2 c_k^\dagger c_k^\dagger c_k \rangle &= -i [\omega^2 - \omega_m^1 - \omega_k - 3i\Gamma] \langle B_m^{1\dagger} P^2 c_k^\dagger c_k^\dagger c_k \rangle \\ &- 2i \bar{M}_{km,2}^* \langle P^{2\dagger} P^2 c_k^\dagger c_k \rangle - i \bar{M}_{km} \langle G^\dagger P^2 c_k^\dagger c_k^\dagger c_k^\dagger c_k \rangle \\ &+ i \sum_l \bar{M}_{kl,2}^* \langle B_m^{1\dagger} B_l^1 c_k^\dagger c_k^\dagger c_k c_k \rangle - \bar{M}_{km,2}^* \langle P^{2\dagger} P^2 c_k^\dagger c_k^\dagger c_k c_k \rangle \end{aligned} \quad (\text{A.17.113})$$

A.18 Materialparameter

Aus [Ahn06] und [DAFK06] für :

Parameter	Zeichen	Wert	Einheit
Bandlückenenergie Quantenpunkt 1	$\hbar\omega_1$	1.0	eV
Bandlückenenergie Quantenpunkt 2	$\hbar\omega_2$	1.1	eV
Dielektrische Konstante	ϵ_m	12.5	
Radiative Dephasierung	Γ	1/500	ps^{-1}
Förster-Wechselwirkung	V_F	1	meV
Biexziton-Shift	V_{cc}	1	meV
Mono-Exziton-Shift	V_{cv}	0.5	meV

Tabelle A.1: Materialparameter für die Numerik

Physikalische Konstante	Wert	Einheit
\hbar	0.6582	eVfs
k_B	0.08617	meV/K
c	299.79	nm/fs
ϵ_0	0.05526	(El.Ladung) ² /eVnm

Tabelle A.2: Physikalische Konstanten

Literaturverzeichnis

- AFK05** AHN, K. J. ; FÖRSTNER, J. ; KNORR, A.: Resonance fluorescence of semiconductor quantum dots: Signatures of the electron-phonon interaction. In: *Phys. Rev. B* 71 (2005), Nr. 15, S. 153309
- Ahn06** AHN, Kwang-Jun: *Fully Quantum Mechanical Description of Ultrashort Time Dynamics of Semiconductor Quantum Dots*, Technische Universität Berlin, Diss., 2006
- AHZ97** ALTEVOGT, T. ; H.PUFF ; ZIMMERMANN, R.: Photon Statistics and the optical Stark effect. In: *Phys.Rev.A* 56 (1997), Nr. 2, S. 1592–1597
- BGL99** BIMBERG, D. ; GRUNDMANN, M. ; LEDENTSOV, N. N.: *Quantum Dot Heterostructures*. Chichester : John Wiley & Sons, 1999
- BSKM⁺96** BRUNE, M. ; SCHMIDT-KAHLER, F. ; MAALI, A. ; DREYER, J. ; HAGLEY, E. ; RAIMOND, J.M. ; HAROCHE, S.: Quantum Rabi Oscillation: A Direct Test of Field Quantization in a Cavity. In: *Phys. Rev. Lett.* 76 (1996), S. 1800
- BT56** BROWN, R.H. ; TWISS, R.Q.: Correlations between Photons in two coherent beams of light. In: *Nature (London)* 177 (1956), S. 27 – 32
- CKSM93** CHUMAKOV, S. M. ; KOZIEROWSKI, M. ; SANCHEZ-MONDRAGON, J.J.: Analytical approach to the photon statistics in the thermal Jaynes-Cummingsmodel with an initially unexcited atom. In: *Phys. Rev. A* 48 (1993), Nr. 6, S. 4594–4597
- CT92** COHEN-TANNOUJDI, C.: *Atom-Photon-Interactions*. John Wiley and Sons, Inc., 1992
- Czy04** CZYCHOLL, G.: *Theoretische Festkörperphysik*. Springer, 2004
- DAFK06** DANCKWERTS, J. ; AHN, K. J. ; FÖRSTNER, J. ; KNORR, A.: Theory of ultrafast nonlinear optics of Coulomb-coupled semiconductor quantum dots: Rabi oscillations and pump-probe spectra. In: *Phys. Rev. B* 73 (2006), Nr. 16, S. 165318
- Fö5** FÖRSTNER, J.: *Light propagation and many-particle effects in semiconductor nanostructures*, Tu-Berlin, Diss., 2005
- FS90** FICK, E. ; SAUERMAN, G.: *The Quantum Statistics of Dynamic Processes*. Berlin : Springer, 1990
- FSKK06** FELDTMANN, T. ; SCHNEEBELI, L. ; KIRA, M. ; KOCH, S. W.: Quantum theory of light emission from a semiconductor quantum dot. In: *Phys. Rev. B* 73 (2006), Nr. 15, S. 155319
- Gla63** GLAUBER, R.J.: The Quantum Theory of Optical Coherence. In: *Phys.Rev.* 130 (1963), Nr. 6, S. 2529–2539
- GP94** GARDINER, C.W. ; PARKINS, A.S.: Driving atoms with light of arbitrary statistics. In: *Phys.Rev.A* 50 (1994), Nr. 2, S. 1792–1806
- GSD⁺05** GERARDOT, B.D. ; STRAUF, S. ; DOOD, M.J.A. de ; BYCHKOV, A.M. ; BADOLATO, A. ; HENNESSY, K. ; HU, E.L. ; BOUWMEESTER, D. ; PETROFF, P.M.: Photon Statistics from Coupled Quantum Dots. In: *Phys.Rev.Let.* 95 (2005), Nr. 137403

- GWLJ07** GIES, Christopher ; WIERSIG, Jan ; LORKE, Michael ; JAHNKE, Frank: Semiconductor model for quantum-dot-based microcavity lasers. In: *Phys Rev A* 75 (2007), Nr. 1, 013803. <http://link.aps.org/abstract/PRA/v75/e013803>
- Hak73** HAKEN, Hermann: *Quantenfeldtheorie des Festkörpers*. Teubner Verlag, Stuttgart, 1973
- HB92** HUTTNER, Bruno ; BARNETT, Stephen M.: Quantization of the electromagnetic field in dielectrics. In: *Phys. Rev. A* 46 (1992), Nr. 7, S. 4306
- HK04** HAUG, H. ; KOCH, S. W.: *Quantum Theory of the Optical and Electronic Properties of Semiconductors*. Singapore : World Scientific, 2004
- Jac01** JACKSON, John D.: *Klassische Elektrodynamik*. 3. De Gruyter, Berlin, New York, 2001
- JC63** JAYNES, E.T. ; CUMMINGS, F.W.: Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser. In: *Proc.IEEE* 51 (1963), Nr. 1, S. 89–109
- KC94** KOCHAN, P. ; CARMICHAEL, H.J.: Photon-Statistics dependence of single-atom absorption. In: *Phys.Rev.A* 50 (1994), Nr. 2, S. 1700–1709
- KDM77** KIMBLE, H.J. ; DAGENAIS, M. ; MANDEL, L.: Photon Antibunching in Resonance Fluorescence. In: *Phys.Rev.Let.* 39 (1977), Nr. 11, S. 691 – 695
- Kib70** *Kapitel* Quantum Electrodynamics. In: KIBBLE, T.W.B.: *Quantum Electrodynamics*. Academic Press, London and New York, 1970, S. 11 – 52
- KJHK99** KIRA, M. ; JAHNKE, F. ; HOYER, W. ; KOCH, S. W.: Quantum theory of spontaneous emission and coherent effects in semiconductor microstructures. In: *Progress in Quantum Electronics* 23 (1999), S. 189
- KK06** KIRA, M. ; KOCH, S. W.: Quantum-optical spectroscopy of semiconductors. In: *Phys. Rev. A* 73 (2006), Nr. 1, S. 013813
- KKKG06** KOCH, S. W. ; KIRA, M. ; KHITROVA, G. ; GIBBS, H. M.: Semiconductor excitons in new light. In: *Nat. Mater* 5 (2006), Nr. 523 - 531
- Lou90** LOUISELL, W. H.: *Quantum Statistical Properties of Radiation*. Wiley, 1990
- LP07** LAMBROPOULOS, P. ; PETROSYAN, D.: *Fundamentals of Quantum Optics and Quantum Information*. Springer, 2007
- LZLW05** LI, G. ; ZHANG, T.C. ; LI, Y. ; WANG, J.M.: Photon Statistics of light fields based on single-photon-counting modules. In: *Phys.Rev.A* 71 (2005), S. 023807
- MGJ01** MARQUEZ, J. ; GEELHAAR, L. ; JACOBI, K.: Atomically resolved structure of InAs quantum dots. In: *Appl. Phys. Lett.* 78 (2001), Nr. 16, S. 2309 – 2311
- Muk95** MUKAMEL, S.: *Principles of nonlinear optical spectroscopy*. New York : Oxford University Press, 1995
- MW95** MANDEL, L. ; WOLF, E.: *Optical coherence and quantum optics*. Cambridge : Cambridge University Press, 1995
- NRS⁺94** NORRIS, T. B. ; RHEE, J.-K. ; SUNG, C.-Y. ; ARAKAWA, Y. ; NISHIOKA, M. ; WEISBUCH, C.: Time-resolved vacuum Rabi oscillations in a semiconductor quantum microcavity. In: *Phys. Rev. B* 50 (1994), Nr. 19, S. 14663–14666

- Orr02** ORRIT, M.: Photon Statistics in Single Molecule Experiments. In: *Single Mol.* 3 (2002), Nr. 5-6, S. 255–265
- Par96** PARKINS, A.S.: Optical pumping with nonclassical light. In: *Phys.Rev.A* 53 (1996), Nr. 4, S. 2893–2896
- PGR⁺07** PRESS, D. ; GOETZINGER, S. ; REITZENSTEIN, S. ; HOFMANN, C. ; LOEFFLER, A. ; KAMP, M. ; FORCHEL, A. ; YAMAMOTO, Y.: Photon Antibunching from a Single Quantum-Dot-Microcavity System in the Strong Coupling Regime. In: *Phys. Rev. Lett.* 98 (2007), S. 117402
- PY92** PRANTS, S.V. ; YACOUPOVA, L.S.: The Jaynes-Cummings-Model with Modulated Field-atom Coupling in Resonator Quantum Electrodynamics. In: *J.Mod.Opt.* 39 (1992), Nr. 5, S. 961–971
- R05** RÖMER, Hartmann: *Theoretical Optics*. WILEY-VCH Verlag, Weinheim, 2005
- RAK⁺06** RICHTER, Marten ; AHN, Kwang J. ; KNORR, Andreas ; SCHLIWA, Andrei ; BIMBERG, Dieter ; MADJET, Mohamed El-Amine ; RENGER, Thomas: Theory of excitation transfer in coupled nanostructures - from quantum dots to light harvesting complexes. In: *Phys. Status Solidi B* 243 (2006), Nr. 10, S. 2302–2310
- Ric05** RICHTER, Marten: *Quantentheorie der Terahertz-Emission laserinduzierter Plasmen*, Technische Universität Berlin, Diplomarbeit, 2005
- Ric07** RICHTER, Marten: *Theory of strong system-bath and electron-light interaction in coupled nanosystems Photosynthetic pigment-protein complexes and coupled quantum dots*, Technische Universität Berlin, Diss., 2007
- Rit06** RITTER, Sandra: *Mikroskopische Theorie der Dynamik zweier gekoppelter Quantenpunkte*, Technische Universität Berlin, Diplomarbeit, 2006
- RRRK07** RICHTER, M. ; RENGER, Th. ; RENGER, G. ; KNORR, A.: Non-perturbative theory for the optical response to strong light of the light harvesting complex LHC II of plants: Saturation of the fluorescence quantum yield. In: *J. Chem. Phys.* 127 (2007), Nr. 7, S. 075105
- RSK⁺05** RICHTER, M. ; SCHAARSCHMIDT, M. ; KNORR, A. ; HOYER, W. ; MOLONEY, J. V. ; WRIGHT, E. M. ; KIRA, M. ; KOCH, S. W.: Quantum theory of incoherent THz emission of an interacting electron-ion plasma. In: *Phys. Rev. A* 71 (2005), Nr. 5, S. 053819
- RUG⁺01** REGELMAN, D.V. ; U.MIZRAHI ; GERSHONI, D. ; EHRENFREUND, E. ; SCHOENFELD, W.V. ; PETROFF, P.M.: Semiconductor Quantum Dot: A Quantum Light Source of Multicolor Photons with Tunable Statistics. In: *Phys.Rev.Let.* 87 (2001), Nr. 25, S. 257401
- Sch99** SCHERZ, U.: *Quantenmechanik: Eine Einführung mit Anwendungen auf Atome, Moleküle und Festkörper*. Teubner, Stuttgart, Leipzig, 1999
- Sch05** SCHWABL, F.: *Quantenmechanik*. Springer, 2005
- Sch07** SCHECK, F.: *Theoretische Physik 4: Quantisierte Felder*. Springer, Berlin Heidelberg New York, 2007
- SK93** SHORE, B. W. ; KNIGHT, P. L.: The Jaynes-Cummings-Model. In: *J. Mod. Opt.* 40 (1993), Nr. 7, S. 1195 – 1238

- SMMH07** SLEPYAN, G. Y. ; MAGYAROV, A. ; MAKSIMENKO, S.A. ; HOFFMANN, A.: Microscopic theory of quantum dot interactions with quantum light: Local field effect. In: *Phys. Rev. B* 76 (2007), S. 195328
- SZ97** SCULLY, M. O. ; ZUBAIRY, M. S.: *Quantum Optics*. Cambridge : Cambridge University Press, 1997
- UML⁺05** UNOLD, Thomas ; MUELLER, Kerstin ; LIENAU, Christoph ; ELSAESSER, Thomas ; WIECK, Andreas D.: Optical Control of Excitons in a Pair of Quantum Dots Coupled by the Dipole-Dipole Interaction. In: *Phys. Rev. Lett.* 94 (2005), Nr. 13, S. 137404
- VWW01** VOGEL, W. ; WELSCH, D. ; WALLENTOWITZ, S.: *Quantum Optics An Introduction*. 2nd edition. Berlin : WILEY-VCH, 2001
- WRRK07** *Kapitel* Theory of the Optical response of Single and Coupled Semiconductor Quantum Dots. In: WEBER, Carsten ; RICHTER, Marten ; RITTER, Sandra ; KNORR, Andreas: *N.N.* Berlin : Springer, 2007, S. N.N.
- ZZ89** ZAHEER, K. ; ZUBAIRY, M.S.: Photon Statistics in Jaynes-Cummings Model without Rotating-Wave-Approximation. In: *Opt. Comm.* 73 (1989), Nr. 4, S. 325 – 330